Title: Zastosowania technik macierzy bazowych w zakresie forcingowych częściowych porządków

Author: Anna Wojciechowska

Citation style: Wojciechowska Anna. (2012). Zastosowania technik macierzy bazowych w zakresie forcingowych częściowych porządków. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

Rozprawa doktorska
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach
Katowice, wrzesień 2012 roku

Anna Wojciechowska

Zastosowania technik macierzy bazowych

w zakresie forcingowych częściowych porządków

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
Prof. dr hab. *Szymona Plewika*

SPIS TREŚCI

1. Preliminaria: teoria zbiorów, oznaczenia

Zbiór wszystkich liczb naturalnych będziemy oznaczali ω. Przy czym, stosujemy konwencję (von Neumanna) $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Zbiór wszystkich skończonych ciągów o wyrazach z X (zakładamy, że zbiór X ma co najmniej dwa elementy), będziemy oznaczali Seq_X. Przyjmujemy, że ciąg pusty należy do Seq_X, czyli $\emptyset \in Seq_X$. Gdy $X = \omega$, to będziemy stosowali skrót $Seq = Seq_\omega$. Elementy Seq_X będziemy nazywali wierzchołkami (*nodes*). Symbolem X^ω będziemy oznaczali zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach z X: między innymi, zbiór wszystkich nieskończonych ciągów liczb naturalnych to ω^ω; zaś rodzinę wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych to 2^ω. Rodzinę wszystkich nieskończonych podzbiorów ω będziemy oznaczali $[\omega]^\omega$.

Gdy A jest podzbiorem liczb naturalnych, to jego elementy można ustawić w ciąg rosnący $(a_0, a_1, \ldots)$ taki, że $a_n < a_{n+1}$ dla wszelkich $n \in \omega$. Przyjmujemy konwencję, że a_n oznacza $(n+1)$-szą w kolejności liczbę należącą do A. Będziemy pisali $A \subseteq^* B$, o ile różnica $A \setminus B$ jest zbiorem skończonym oraz mówili, że zbiór A jest prawie zawarty w B. Symbolem A^* będziemy oznaczali rodzinę wszystkich nieskończonych podzbiorów ω prawie zawartych w A, tj.

$$A^* = \{B \in [\omega]^\omega : B \subseteq^* A\}.$$

Jeśli przekrój dwóch zbiorów jest skończony, to mówimy, że zbiory te są prawie rozłączne. Pozostałe, nie zdefiniowane w tej rozprawie pojęcia oraz symbole używany zgodnie z książką [6].

Rozprawę zaczynamy od przypomnienia twierdzenia Kulpy-Szymańskiego oraz omówienia jego możliwych zastosowań do szacowania addytywności niektórych ideałów tak, jak to się nam udało w twierdzeniu 67. Metody które zamierzaliśmy rozpracować - dla potrzeb tej rozprawy nazywamy je technikami macierzy bazowe - są dobrze opisane jedynie w zakresie separatywnych częściowych porządków. Z separatywną modyfikacją częściowego porządku zetknęliśmy się przy okazji wykładów profesora B. Balcara. Okazało się, że takie modyfikacje są znane, ale niezbyt klarownie opisywane. W rozdziałach 3 - 5 podajemy jej pełny opis. Rozdziały 5 - 7 poświecone są pojęciom związanym z technikami macierzy bazowej. Sądzimy, żc pojęcia te zostały wyodrębnionc dopicro w tcj rozprawie. Nazwy macicrz rozrywająca, gęsta lub bazowa to nasze oryginalne propozycje. To samo dotyczy rozdrabnialności, drzewa bazowego, a także systemu drzew. W rozdziale 8 - a także w podrozdziale 3.3, przypominamy ustalenia poczynione przez M. Machurę w jego rozprawie doktorskiej, dotyczącej częściowych porządków postaci $(C(X), \subseteq^\circ)$. Okazuje się, że rezultaty z artykułów [53] oraz [54] nie mają swoich odpowiedników w zakresie forcingu Silvera, tj. w zastosowaniu do segmentów, patrz podrozdział 9.1. Rozdziały 9 - 12 zawierają opisy „kontrprzykładów", które objaśniają trudności w zastosowaniu technik macierzy bazowych do szacowania inwariantów kardynalnych. Mimo tego, zamieściliśmy je, bo sądzimy, iż są one inspiracją do stawiania i rozwiązywania ciekawych problemów kombinatorycznych. Do tej rozprawy dołączyliśmy oryginalny tekst artykułu [27]. W końcowej fazie redagowania tej rozprawy dowiedzieliśmy się, że artykuł jest cytowany w monografii L. J. Halbeisena. Umożliwiło nam to zrezygnowanie z powtarzania fragmentów tego artykułu, bo mogliśmy skorzystać z odsyłaczy.

2.1. Twierdzenie Štěpánka-Vopěnki. Prascy matematycy P. Štěpánek oraz P. Vopěnka w artykule [51] udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie (patrz [51] oraz [55]). *Przestrzeń metryczna, w której niepuste zbiory otwarte są nieośrodkowe, jest sumą rosnącego ciągu długości ω_1 zbiorów nigdziegęstych.* □

Oryginalna metoda dowodu tego twierdzenia, co zauważył E. Engeler w omówieniu [12], jest wzorowana na metodach i środkach wypracowanych przez P. Vopěnkę w teorii modeli. Algorytm rozumowania leżącego u podstaw tego twierdzenia przedstawili W. Kulpa i A. Szymański w artykule [32].

2.2. Twierdzenie Kulpy-Szymańskiego. Następujące twierdzenie to będziemy nazywali twierdzeniem Kulpy-Szymańskiego:

Twierdzenie (patrz [32], porównaj [2]). *Niech β będzie liczbą kardynalną nieprzeliczalną oraz regularną. Jeśli w przestrzeni topologicznej istnieje π-baza, która jest sumą mniej niż β rodzin złożonych z parami rozłącznych podzbiorów otwartych oraz dowolny niepusty zbiór otwarty zawiera co najmniej β parami rozłącznych podzbiorów otwartych, to przestrzeń ta jest sumą rosnącego ciągu zbiorów nigdziegęstych długości β .*

Powtórzymy jego uzasadnienie za artykułem [2], który wyjaśni znaczenia wyżej użytych pojęć w kontekście przestrzeni topologicznych, w których istnieją rodziny H_α złożone z parami rozłącznych zbiorów otwartych takie, że rodzina $\Theta = \bigcup\{H_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ tworzy π-bazę, gdzie $\lambda < \beta$ oraz β jest nieprzeliczalną liczbą kardynalną. Założenia te będą istotne w lematach 1 oraz 3. Nie będziemy ich przywoływać ponownie.

Lemat 1. *Jeśli dowolnemu niepustemu zbiorowi $G \in \Theta$ można przyporządkować rodzinę $\{G_\mu \subset G : \mu < \beta\}$ złożoną z parami rozłącznych zbiorów otwartych, to istnieje nierosnący ciąg zbiorów otwartych i gęstych $\{V_\gamma : \gamma < \beta\}$ o pustym przekroju.*

Dowód. Musimy określić zbiory otwarte i gęste V_γ tak, aby

$$\bigcap\{V_\gamma : \gamma < \beta\} = \emptyset \text{ oraz } \gamma < \alpha \Rightarrow V_\alpha \subseteq V_\gamma.$$

Kładziemy

$$V_\gamma = \bigcup\{G_\mu : \gamma < \mu < \beta \text{ oraz } G \in \Theta\}.$$

Zbiory V_γ są otwarte oraz tworzą nierosnący ciąg długości β. Są one gęste, bo $G_{\gamma+1} \subset V_\gamma$ dla dowolnego zbioru G należącego do π-bazy Θ.

Przypuśćmy, że $x \in \bigcap\{V_\gamma : \gamma < \beta\}$. Wtedy dla dowolnego $\alpha < \lambda$ istnieje co najwyżej jedna liczba porządkowa $\alpha_x < \beta$ taka, że

$$x \in G_{\alpha_x} \subset G \in H_\alpha.$$

Założyliśmy, że β jest regularną liczbą porządkową, a więc zbiór liczb porządkowych $\{\alpha_x : \alpha < \lambda\}$ jest ograniczony w β. Jeśli $\gamma < \beta$ ogranicza ten zbiór, to x nie należy do V_γ. Otrzymaliśmy sprzeczność. □

Dopełnienia zbiorów V_γ są nigdziegęste, ich suma daje całą przestrzeń. Tworzą one ciąg niemalejący długości β. Taki ciąg łatwo powiększyć do rosnącego ciągu zbiorów nigdziegęstych, korzystając z następującego lematu.

Lemat 2. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną taką, że dowolny niepusty zbiór otwarty zawiera dwa rozłączne podzbiory otwarte. Jeśli $\{V_\alpha : \alpha < \beta\}$ jest rodziną parami rozłącznych zbiorów otwartych oraz $x_\alpha \in V_\alpha$, to zbiór $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ jest nigdziegęsty w X.*

Dowód. Gdy U jest niepustym zbiorem otwartym przecinającym V_α, to x_α może należeć do co najwyżej jednego zbioru G_μ, o ile $G \in \Theta$ oraz $G \subset U \cap V_\alpha$. Jeśli $x \in G_\mu$, to zbiór otwarty $G_{\mu+1}$ jest zawarty w $U \cap V_\alpha$ oraz $\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \cap G_{\mu+1} = \emptyset$. □

Ciąg zbiorów otwartych i gęstych V_γ postulowany w lemacie 1 oraz zbiór nigdziegęsty $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ pozwala zdefiniować zbiory

$$V_\gamma \setminus \{x_\mu : \gamma < \mu < \beta\}.$$

Ich dopełnienia tworzą rosnący ciąg zbiorów nigdziegęstych, dający w sumie całą przestrzeń.

2.3. **Zastosowania twierdzenia Kulpy-Szymańskiego.** Nietrywialne zastosowanie twierdzenia Kulpy-Szymańskiego zaprezentowano w artykule B. Balcara, J. Pelanta oraz P. Simona [2]. Przy założeniu $h < \mathfrak{c}$ (tj. wysokość drzewa bazowego jest mniejsza niż continuum) zastosowano je do wykazania, że

$$h = add(nwd(\omega^*)) \leqslant cov(nwd(\omega^*)) \leqslant h^+,$$

gdzie $nwd(\omega^*)$ to ideał podzbiorów nigdziegęstych w przestrzeni wszystkich ultrafiltrów nad liczbami naturalnymi. W artykule [2], patrz 3.5 Main Theorem (1), wprost pokazano $h \leqslant cov(nwd(\omega^*)) \leqslant h^+$, z dowodem który z dokładnością do praw De Morgana został umieszczony w tej rozprawie jako dowód lematu 1.

Równość $h = add(nwd(\omega^*))$ wynika bezpośrednio z faktów dowodzonych w [3]. Analogiczna idea została zastosowana w pracy [29], a także w rozprawie doktorskiej P. Kalemby [28]. Analogia dotyczyła tzw. "trimmed trees", zaś konkluzja jest ujawniona w Theorem 6.6 oraz Corollary 6.7 z artykułu [29]. W kolejnym lemacie komentujemy jedynie sens owej analogii, tj. zaprezentujemy możliwie najogólniejsze omówienie idei dowodu równości $h = add(nwd(X))$, gdzie X jest przestrzenią topologiczną.

Niech λ będzie najmniejszą liczbą kardynalną taką, że rodzina

$$\Theta = \bigcup\{H_\alpha : \alpha \in \lambda\}$$

tworzy π-bazę przestrzeni X. Załóżmy, że rodziny H_α składają się ze zbiorów otwartych parami rozłącznych oraz, że dowolny zbiór otwarty należący do Θ zawiera więcej niż λ parami rozłącznych podzbiorów otwartych.

Lemat 3. *Jeśli dla dowolnej liczby porządkowej $\mu < \lambda$ istnieje maksymalna rodzina parami rozłącznych zbiorów otwartych wpisana w każde $\{G_\alpha : \alpha < \mu\}$, gdzie G_α są maksymalnymi rodzinami parami rozłącznych zbiorów otwartych, to addytywność ideału zbiorów nigdziegęstych wynosi λ.*

Dowód. Jeśli $V \in H_\alpha$, to ustalamy punkt $x_V \in V$. Zbiory

$$A_\alpha = \{x_V : V \in H_\alpha\}$$

są nigdziegęste. Założyliśmy, że rodzina $\Theta = \bigcup\{H_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ jest π-bazą, a więc suma $\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ jest gęsta, a więc nie jest zbiorem nigdziegęstym.

Ustalmy $\mu < \lambda$ oraz załóżmy, że zbiory B_α są nigdziegęste dla wszelkich $\alpha < \mu$. Z kolekcji wszystkich zbiorów otwartych i rozłącznych z B_α wybieramy maksymalną rodzinę G_α złożoną ze zbiorów parami rozłącznych. Jeśli G_μ jest maksymalną rodziną parami rozłącznych zbiorów otwartych wpisaną w każde G_α, to suma $\bigcup G_\mu$ jest zbiorem otwartym gęstym oraz rozłącznym z

$$\bigcup\{B_\alpha : \alpha < \mu\}.$$

Innymi słowy, addytywność ideału zbiorów nigdziegęstych jest niemniejsza niż λ. $\square$

2.4. **Oczekiwane rezultaty.** Lematy 1 oraz 3 precyzują istotne fakty dotyczące tzw. drzewa bazowego w rozumieniu artykułów [2] oraz [3]. W tej rozprawie chcemy ich użyć w charakterze narzędzi do badania ideałów. Ich zamierzone zastosowania to wypełnianie następującego schematu. Przypuśćmy, że dany jest ideał (q) oraz topologia na zbiorze $\bigcup(q) = X$. Jeśli spełnione są założenie lematów 1 oraz 3 oraz (q) jest ideałem zbiorów nigdziegęstych, to

$$add(nwd(q)) \leqslant cov(nwd(q)) \leqslant add(nwd(q))^+.$$

Nie wszystkie ideały, które zamierzaliśmy badać w pełni podpadają pod ten schemat. Wtedy będziemy traktowali je jako kontrprzykłady.

Naszym początkowym założeniem była hipoteza, że powyższe nierówności dotyczą drzew Sacksa, Lavera bądź Millera, w szczególności ideałów (s^0), (l^0) albo (m^0). Jeśli $\mathfrak{c} = \omega_2$, to takie nierówności są spełnione. Nie umiemy tego zweryfikować, korzystając jedynie z aksjomatów ZFC. Dodatkowo, gdyby udało się pokazać, że ideały (s^0), (l^0) lub (m^0) są wyznaczone przez macierze bazowe - innymi słowy, systemy drzew, dla których zachodzi odpowiednia modyfikacja twierdzenia o drzewie bazowym - to dostalibyśmy hipotezy niesprzeczne z ZFC, które wskazywały na izomorficzność pewnych ideałów. Jest tak w przypadku ideału podzbiorów nigdzie Ramsey'a (r^0), patrz [46]. W pracy [27], wspólnej z P. Kalembą oraz Sz. Plewikiem, udowodniliśmy, że jeśli $\omega_1 = cov(v^0)$, to ideał (v^0) ma typ $(\mathfrak{c}, \omega_1, \mathfrak{c})$. Stąd wnioskujemy, że izomorfizm ideałów (r^0) oraz (v^0) jest niesprzeczny z ZFC, bo hipoteza $\mathfrak{c} = \omega_1$ pociąga izomorfizm tych ideałów. Przypuszczamy, że podobnie może być z ideałami (s^0), (l^0) lub (m^0).

Przy założeniu $t > \omega_1$ w częściowym porządku $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ dowolny łańcuch malejący długości ω_1 jest ograniczony z dołu, tak samo jest dla ilorazu tego częściowego porządku. Zaś w częściowym porządku

$$(\{\langle A, B\rangle^* : \langle A, B\rangle \text{ jest segmentem}\}, \subseteq)$$

istnieją nieograniczone łańcuchy malejące, co wynika z istnienia luk Hausdorffa. Wtedy oba częściowe porządki są nieizomorficzne: dokładniej mówiąc, nieizomorficzny są ich porządki ilorazowe. Jednakże nie wiemy, czy również stowarzyszone z nimi ideały (r^0) oraz (v^0) muszą być nieizomorficzne.

3.1. Drzewa bazowe, a separatywność. Przykłady twierdzenia o drzewie bazowym to "Base Matrix Lemma" z artykułu [2, str. 14], "Base tree" z artykułu [3, str. 350] oraz ich uogólnienia w zakresie algebr Boole'a [3, str. 339 - 341], a także uogólnienia dla tzw. "notion of forcing" [49, str. 68]. Przykłady te dotyczą częściowych porządków mających własność separatywności. Ten rozdział dostarcza narzędzi pozwalających na modyfikację częściowych porządków do separatywnych częściowych porządków, które będziemy nazywali modyfikacjami separatywnymi. W konsekwencji udowodnimy wersję twierdzenia o drzewie bazowym dla częściowych porządków, które niekoniecznie mają własność separatywności. W oryginalnych dowodach uogólnień twierdzenia o drzewie bazowym separatywność potrzebna jest do uzasadnienia tego, że antyłańcuchy tworzące macierze bazowe są uporządkowane przez wpisywanie. Gdy częściowy porządek nie ma własności separatywności, to takich uporządkowań antyłańcuchów - tworzących macierze rozrywające - może nie być.

Częściowy porządek na zbiorze $\mathbb{Q}$ jest relacją *przechodnią*, którą zwykle będziemy oznaczali symbolem $\leqslant$. Relacja częściowego porządku jest zawarta w produkcie $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Innymi słowy, częściowy porządek to relacja spełniająca następujący warunek: *Jeśli* $p \leqslant q$ *oraz* $q \leqslant y$, *to* $p \leqslant y$. Będziemy także zakładali - choć nie zawsze będzie to konieczne, że relacja częściowego porządku jest *zwrotna*, tj. $x \leqslant x$ dla wszelkich $x \in \mathbb{Q}$.

Czasami będziemy podkreślali założenie zwrotności, aby uwypuklić jego rolę w omawianych faktach. Dla przykładu zrobimy to, by uniknąć trudności - pojawiających się w trakcie badania separatywnych modyfikacji - związanych z sytuacją gdy $i(p) = \emptyset$. Zwrotność daje $p \in i(p)$, tj. użyteczną własność separatywnej modyfikacji, o której będzie mowa później.

Elementy $p, q \in \mathbb{Q}$ będziemy nazywali *nieporównywalnymi*, co symbolicznie zapisujemy $p \perp q$, gdy nie istnieje $x \in \mathbb{Q}$ takie, że $x \leqslant p$ oraz $x \leqslant q$. W $\mathbb{Q}$ są elementy nieporównywalne wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest to częściowy porządek skierowany.

Będziemy mówili, że dwa elementy $q, p \in \mathbb{Q}$ są *zgodne*, gdy istnieje $x \in \mathbb{Q}$ taki, że $x \leqslant p$ oraz $x \leqslant q$: innymi słowy, p nie jest zgodne z q wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawdą jest $p \perp q$. W naturalnej konwencji elementy porównywalne, to elementy zgodne. Zaś elementy niezgodne są określane jako elementy nieporównywalne. W literaturze bywa także stosowane inne nazewnictwo: Elementy p oraz q są określane jako nieporównywalne, gdy nieprawdą jest $p \leqslant q$ oraz $q \leqslant p$. W tej rozprawie będziemy mowili elementy nieporównywalne lub elementy zgodne.

W anglojęzycznej literaturze używane są pojęcia: comparable, incomparable, compatible oraz incompatible; patrz [25]. Używamy terminów: zgodne w znaczeniu compatible; nieporównywalne w znaczeniu incompatible. Do tego domyślnie dodajemy, że porównywalne znaczy comparable. Z kolei polskojęzycznego odpowiednika terminu incomparable nie używamy, chociaż sformułowanie "Elements x and y are incomparable" mówi, że ani $x \leqslant y$, ani $y \leqslant x$ nie nie jest spełnione względem relacji $\leqslant$.

W literaturze (dla przykładu [6, str. 350] lub [33, str. 88]) separatywność (tj. separative) bywa definiowana tak:

Gdy dla wszelkich $q, y \in \mathbb{Q}$ takich, że nie zachodzi $q \leqslant y$ istnieje $x \leqslant q$ które jest nieporównywalne z y, to częściowy porządek w $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest *separatywny.*

Kontrapozycją separatywności jest następujący warunek:
Jeśli $q, y \in \mathbb{Q}$ oraz nie istnieje $x \leqslant q$ taki, że $y \perp x$, to $y \leqslant q$.
Zwróćmy uwagę, że zawsze zachodzi implikacja:

Fakt 4. *Jeśli $p \leqslant q$ oraz $y \perp q$, to $y \perp p$.* □

Topologia z relacją inkluzji niekoniecznie jest separatywnym częściowym porządkiem, lecz rodzina wszystkich zbiorów regularnie otwartych tak. Dla przykładu, rozważmy liczby rzeczywiste, sumę przedziałów $(0,1) \cup (1,2)$ oraz przedział $(0,2)$. Wtedy przedział $(0,2)$ nie jest zawarty w sumie $(0,1) \cup (1,2)$. Jednocześnie, nie istnieje niepusty przedział otwarty zawarty w $(0,2)$ oraz rozłączny z $(0,1) \cup (1,2)$. Czyli warunek separatywności nie jest spełniony. Dla zbiorów regularnie otwartych ten argument nie ma zastosowania, gdyż suma $(0,1) \cup (1,2)$ nie jest zbiorem regularnie otwartym.

3.2. **Przykłady separatywnych częściowych porządków.** Zbiór częściowo uporządkowany $([\omega]^\omega, \subseteq)$ nie jest separatywny, ale $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$

to separatywny częściowy porządek. Inaczej jest w przypadku segmentów, które badaliśmy w artykule [27, str. 219]. Segment to zbiór postaci

$$\langle A, B\rangle = \{X \in [\omega]^\omega : A \subseteq X \subseteq B\},$$

gdzie $A \subset B$ oraz $B \setminus A \in [\omega]^\omega$.

Lemat 5. *Rodzina wszystkich niepustych segmentów z relacją inkluzji jest separatywnym częściowym porządkiem.*

Dowód. Rozważmy segmenty $\langle A, B\rangle$ oraz $\langle C, D\rangle$. Załóżmy, że $X \in \langle A, B\rangle \setminus \langle C, D\rangle$. Jeśli istnieje $t \in C \setminus X$, to

$$\emptyset \neq \langle A, B \setminus \{t\}\rangle \subseteq \langle A, B\rangle \text{ oraz } \langle A, B \setminus \{t\}\rangle \cap \langle C, D\rangle = \emptyset.$$

Jeśli istnieje $t \in X \setminus D$, to

$$\emptyset \neq \langle A \cup \{t\}, B\rangle \subseteq \langle A, B\rangle \text{ oraz } \langle A \cup \{t\}, B\rangle \cap \langle C, D\rangle = \emptyset.$$

Obie powyższe implikacje uzasadniają separatywność. □

Kolejny lemat jest tego samego typu, patrz [28, str. 15]. Z segmentami postaci $\langle A, B\rangle$ stowarzyszone są tzw. $*$–segmenty, pojęcie to wprowadziliśmy w artykule [27, str. 220],

$$\langle A, B\rangle^* = \{X \in [\omega]^\omega : A \subseteq^* X \subseteq^* B\}.$$

Tutaj zachowujemy oryginalne oznaczenie, którego nie należy mylić z zasadą używania symbolu * w odniesieniu do podzbiorów liczb naturalnych.

Lemat 6. *Rodzina wszystkich niepustych $*$-segmentów z relacją inkluzji jest separatywnym częściowym porządkiem.*

Dowód. Załóżmy, że $\emptyset \neq \langle A, B\rangle \setminus \langle C, D\rangle^*$. Jeśli $X \in \langle A, B\rangle$ oraz istnieje $F \in [C \setminus X]^\omega$, tj. nie zachodzi $C \subseteq^* X$, to

$$X \in \langle A, B \setminus F\rangle \subseteq \langle A, B\rangle \text{ oraz } \langle A, B \setminus F\rangle \cap \langle C, D\rangle^* = \emptyset.$$

Stąd mamy $\langle A, B \setminus F\rangle^* \subseteq \langle A, B\rangle^*$ oraz $\langle A, B \setminus F\rangle^* \cap \langle C, D\rangle^* = \emptyset$.

Jeśli $X \in \langle A, B\rangle$ oraz istnieje $E \in [X \setminus D]^\omega$, to bierzemy $F \in [E]^\omega$ takie, że różnica $E \setminus F$ jest nieskończona. Następnie sprawdzamy, że $\emptyset \neq \langle A \cup F, B\rangle \subseteq \langle A, B\rangle$ oraz $\langle A \cup F, B\rangle \cap \langle C, D\rangle^* = \emptyset$. □

3.3. **Przykłady z rozpraw J. Hirschorna oraz M. Machury.** Omawiane poniżej przykłady są badane w pracach [21], [22], [39] oraz [40]. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną lub na X jest określona miara, to $C(X)$, $K(X)$ oraz $L(X)$ oznaczają (kolejno) rodzinę wszystkich funkcji ciągłych, funkcji o własności Baire'a lub funkcji mierzalnych o wartościach w liczbach niewymiernych. Gdy liczby niewymierne reprezentujemy jako zbiór $[\omega]^\omega$ z topologią naturalną, to kładąc

$$f \subseteq^\circ g, \text{ o ile } f(x) \subseteq^* g(x) \text{ dla prawie wszystkich } x \in X,$$

określamy częściowy porządek, który możemy zacieśnić do $C(X)$, $K(X)$ lub $L(X)$. Przy czym, dla $(K(X), \subseteq^\circ)$ prawie wszystkie znaczy za wyjątkiem zbioru I kategorii. Dla $(L(X), \subseteq^\circ)$ za wyjątkiem zbioru miary zero. Zaś dla $(C(X), \subseteq^\circ)$ prawie wszystkie znaczy wszystkie. Te przykłady ilustrują ogólny schemat, w którym termin prawie wszytskie znaczy za wyjątkiem zbioru należącego do z góry zadanego ideału. To prowadzi do badania częściowych porządków na rodzinie wszystkich funkcji ciągłych o wartościach w liczbach niewymiernych, które wymagają znajomości kombinatorycznych właściwości ideałów. Poniżej przykładowo opisujemy problemy i trudności związane z takimi badaniami.

Jeśli X jest przestrzenią spójną, to dowolna ciągła funkcja $f : X \to [\omega]^\omega$ musi być stała, a więc $(C(X), \subseteq^\circ)$ oraz $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ są izomorficznymi separatywnymi częściowymi porządkami. Aktualnie, nie znamy pełnej listy założeń jakie spełniać musi przestrzeń X, by częściowy porządek $(C(X), \subseteq^\circ)$ był separatywny.

Zauważmy, że jeśli f oraz g są funkcjami typu $X \mapsto [\omega]^\omega$, to wzór $H^f_g(x) = f(x) \setminus g(x)$ daje funkcję o wartościach w zbiorze Cantora 2^ω, o ile zbiory utożsamiamy z ich funkcjami charakterystycznymi. Funkcja H^f_g jest złożeniem funkcji $x \mapsto (f(x), g(x))$ oraz funkcji ciągłej $(A, B) \mapsto A \setminus B$, którą oznaczmy literą F. Mamy $F : 2^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega$. Gdy $\pi_n^{-1}(i)$ jest zbiorem podbazowym w 2^ω, to

$$F^{-1}[\pi_n^{-1}(i)] = \begin{cases} \pi_n^{-1}(1) \times \pi_n^{-1}(0), & \text{o ile } i = 1; \\ (2^\omega \times 2^\omega) \setminus (\pi_n^{-1}(1) \times \pi_n^{-1}(0)), & \text{o ile } i = 0. \end{cases}$$

Funkcja F jest więc ciągła, bo - jak pokazaliśmy - przeciwobraz dowolnego zbioru podbazowego jest otwarty. Jednakże, dla wielu punktów $x \in 2^\omega \times 2^\omega$ wartości $F(x)$ nie muszą należeć do $[\omega]^\omega$.

Niekiedy $H^f_g \notin C(X)$. Wtedy formalnie zachodzi warunek $H^f_g \subseteq^\circ f$. O każdym $p \subseteq^\circ g$ możemy stwierdzić, iż $p \perp H^f_g$, ale H^f_g nie jest dobrym kandydatem dla sprawdzenia separatywności w takim przypadku. Właściwy kandydat musiałby być określony inaczej poza zbiorem

$$\{x \in X : f(x) \setminus g(x) \in [\omega]^{\omega}\}.$$

4.1. **Relacja wyznaczająca separatywną modyfikację.** Jeśli $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowany oraz $p \in \mathbb{Q}$, to niech $i(p)$ będzie zbiorem wszystkich $q \in \mathbb{Q}$ takich, że jeśli $r \leqslant q$ to elementy r oraz p są zgodne: innymi słowy

$$i(p) = \{q \in \mathbb{Q} : \text{ nie istnieje } y \leqslant q \text{ takie, że } y \perp p\}.$$

Funkcja i elementom z $\mathbb{Q}$ przyporządkowuje podzbiory $\mathbb{Q}$. Natychmiast z definicji dostajemy:

- Jeśli $x \in i(p)$ oraz $q \leqslant x$, to $q \in i(p)$;
- Gdy $y \notin i(p)$, to istnieje $q \leqslant y$ takie, że $q \perp p$;
- Gdy $x \perp p$, to $x \notin i(p)$ oraz $p \notin i(x)$;
- Gdy częściowy porządek $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest skierowany, to $i(p) = \mathbb{Q}$ dla dowolnego $p \in \mathbb{Q}$.

Fakt 7. *Jeśli relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to $p \in i(p)$ dla wszelkich $p \in \mathbb{Q}$.*

Dowód. Jeśli $y \leqslant p$ oraz - wobec zwrotności $y \leqslant y$, to nie prawdą jest $y \perp p$. To pociąga $p \in i(p)$. □

Fakt 8. *Jeśli $p \leqslant q$, to $i(p) \subseteq i(q)$.*

Dowód. Gdy $x \notin i(q)$, to istnieje $y \leqslant x$ takie, że $y \perp q$. Gdyby jednocześnie $x \in i(p)$, to istniałby $z \leqslant y \leqslant x$ takie, że $z \leqslant p \leqslant q$. Istnienie takiego z przeczy $y \perp q$. □

Powyższy fakt jest także wysłowiony w książce [25] jako lemat 14.11 (i) oraz zaopatrzony numerem (14.5).

Fakt 9. *Jeśli relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to $p \perp q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i(p) \cap i(q) = \emptyset$.*

Dowód. Załóżmy, że $x \in i(p) \cap i(q)$ oraz ustalmy $y \leqslant x$. Istnieje więc $r \leqslant y \leqslant x$ takie, że $r \leqslant p$. Skoro także $x \in i(q)$, to istnieje $z \leqslant r \leqslant y \leqslant x$ takie, że $z \leqslant q$. Mamy więc $z \leqslant r \leqslant p$, co to przeczy $p \perp q$.

Załóżmy, że nie zachodzi $p \perp q$. Istnieje więc $x \leqslant p$ taki, że $x \leqslant q$. Wobec faktów 7 oraz 8 dostajemy $x \in i(x) \subseteq i(p) \cap i(q)$, czyli $i(p) \cap i(q) \neq \emptyset$. □

Wniosek 10. *Jeśli relacja $\leqslant$ jest zwrotna oraz $i(x) \subseteq i(p)$, to nieprawdą jest, iż $x \perp p$.*

Dowód. Teza wynika z poprzedniego faktu, bo $x \in i(x) \cap i(p)$. $\square$

Fakt 11. *Jeśli relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to $x \in i(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i(x) \subseteq i(p)$.*

Dowód. Jeśli $y \notin i(p)$, to ustalamy $q \leqslant y$ takie, że $q \perp p$. Gdyby jedocześnie $y \in i(x)$, to znajdziemy $t \leqslant q \leqslant y$ takie, że $t \leqslant x$. Skoro $q \perp p$ pociąga $t \perp p$, to $t \leqslant x$ daje $x \notin i(p)$.

Implikacja przeciwna wynika z faktu 7, bo $x \in i(x) \subseteq i(p)$. $\square$

Fakt 12. *Jeśli relacja częściowego porządku $\leqslant$ jest separatywna oraz zwrotna, to $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i(x) \subseteq i(y)$.*

Dowód. Wobec faktu 8 pozostało pokazać $i(x) \subseteq i(y) \Rightarrow x \leqslant y$. Gdy nie zachodzi $x \leqslant y$, to wobec separatywności istnieje $p \leqslant x$ takie, że $p \perp y$. Z faktu 9 mamy $i(p) \cap i(y) = \emptyset$, zaś ze zwrotności oraz faktu 8 dostajemy $p \in i(p) \subseteq i(x)$; sprzecznośc. $\square$

Uzasadniliśmy dostatecznie wiele faktów, by precyzyjnie określić czym jest separatywna modyfikacja. Mianowicie,

$$\text{jeśli } i(p) \subseteq i(q), \text{ to będziemy pisali } p \leqslant_i q.$$

Jeśli relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to dwa elementy są nieporównywalne w sensie relacji $\leqslant$ wtedy i tylko wtedy, gdy są nieporównywalne w sensie relacji $\leqslant_i$: innymi słowy,

Lemat 13. *Jeśli relacja częściowego porządku $\leqslant$ jest zwrotna, to*

$$\perp = \perp_i.$$

Dowód. Wobec faktu 9 wystarczy pokazać, że $p \perp_i q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i(p) \cap i(q) = \emptyset$.

Gdy $y \in i(p) \cap i(q)$, to - wobec faktu 7, nieprawdą jest $p \perp_i q$.

Przypuśćmy, że nieprawdą jest $p\bot_i q$. Wtedy istnieje $y \in \mathbb{Q}$ takie, że $i(y) \subseteq i(p) \cap i(q)$. Na podstawie faktu 7, dostajemy $y \in i(p) \cap i(q)$: innymi słowy, nieprawdą jest $i(p) \cap (q) \neq \emptyset$. □

Częściowy porządek $(\mathbb{Q}, \leqslant_i)$ będziemy nazywali *separatywną modyfikacją* zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathbb{Q}, \leqslant)$. Relację nieporównywalności w sensie $\leqslant_i$ będziemy oznaczali $\bot_i$. W książce T. Jecha [25] separatywna modyfikacja jest określana terminem separative quotient. Zarysowane są tam także zręby ogólnej teorii separatywnych modyfikacji. Dla przykładu, separatywna modyfikacja jest jednoznaczna z dokładnością do izomorfizmu, patrz zadanie 14.9. Także udowodniono tam kolejne twierdzenie w odniesieniu do zwrotnej relacji częściowego porządku.

Twierdzenie 14. *Elementy są zgodne względem relacji $\leqslant$ wtedy i tylko wtedy, gdy są one zgodne względem relacji $\leqslant_i$.* □

Pojęcie izomorfizmu częściowych porządków omówimy później. Wymaga ono dokładnego wyróżnienia klas abstrakcji relacji: p równoważne q wtedy i tylko wtedy, gdy $p \leqslant q$ oraz $q \leqslant p$. Wtedy zaproponujemy dokładniejsze rozróżnienie między separatywną modyfikacją, a separatywnym ilorazem, czyli odpowiednikiem "separative quotient".

Twierdzenie 15. *Relacja $\bot$ jednoznacznie wyznacza separatywną modyfikację częściowego porządku $(\mathbb{Q}, \leqslant)$, i odwrotnie.*

Dowód. Kładziemy $p \leqslant_\bot q$, o ile $y\bot q$ implikuje $y\bot p$ dla wszelkich $y \in \mathbb{Q}$. Wobec lematu 13 wystarczy pokazać, że relacje $\leqslant_\bot$ oraz $\leqslant_i$ są tożsame.

Załóżmy $i(p) \subseteq i(q)$ oraz przypuśćmy, że nie zachodzi $p \leqslant_\bot q$. Wtedy istnieje $y \in \mathbb{Q}$ taki, że $y\bot q$ oraz y jest zgodny z p. Wobec faktu 9, dostajemy $i(p) \cap i(y) \neq \emptyset$ oraz $i(q) \cap i(y) = \emptyset$. Dostajemy sprzeczność, która uzasadnia implikację $p \leqslant_i q \Rightarrow p \leqslant_\bot q$.

Przypuśćmy, że $y \in i(p) \setminus i(q)$ oraz $p \leqslant_\bot q$. Skoro $y \notin i(q)$, to istnieje $x \leqslant y$ takie, że $x\bot q$. Skoro jednak $y \in i(p)$, to nieprawdą jest $x\bot p$. Czyli nieprawdą jest także $p \leqslant_\bot q$. □

Twierdzenie 16. *Jeśli $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{Q}, \leqslant_i)$ jest separatywny.*

Dowód. Ustalmy $y, q \in \mathbb{Q}$ takie, że nie zachodzi $y \leqslant_i q$. Istnieje więc $z \in i(y) \setminus i(q)$. Skoro $z \notin i(q)$, to istnieje $x \leqslant z$ takie, że $i(x) \cap i(q) = \emptyset$. Czyli $x \perp_i q$ na podstawie lematu 13. Ale $z \in i(y)$ oraz $x \leqslant z$, a więc z faktów 8 oraz 11 dostajemy $x \leqslant_i y$. To kończy dowód separatywności relacji $\leqslant_i$. □

4.2. **Inne właściwości separatywnej modyfikacji.** Identyczność spełnia warunki definicji "completely embedding" w rozumieniu książki K. Kunena [33, str. 218], co zapisujemy

$$(\mathbb{Q}, \leqslant) \subset_c (\mathbb{Q}, \leqslant_i).$$

Relacja $\subset_c$ oznacza spełnianie następujących warunków:

- $p \leqslant q \Rightarrow i(p) \subseteq i(q)$, t.j. $p \leqslant q \Rightarrow p \leqslant_i q$;
- $p \perp q \Leftrightarrow i(p) \cap i(q) = \emptyset$;
- $\forall q \exists p \forall y \leqslant p \exists x \leqslant_i y$ takie, że $x \leqslant_i q$.

Pierwszy warunek został uzasadniony faktem 8. Drugi warunek to inne sformułowanie stwierdzenia 13, o ile relacja $\leqslant$ jest zwrotna. Trzeci warunek sprawdzamy, kładąc $p = q$. Jeśli $y \leqslant p$, to $i(y) \subseteq i(p)$ na podstawie faktu 8. Wobec faktu 11, jeśli $x \in i(y)$, to $x \leqslant_i y$. Dostaliśmy więc sam w sobie ciekawy fakt. Jeśli $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to $(\mathbb{Q}, \leqslant) \subset_c (\mathbb{Q}, \leqslant_i)$.

4.3. **Iloraz częściowego porządku.** W dowolnym zbiorze częściowo uporządkowanym $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ można rozważać następującą relację:

$$p \cong q \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p \leqslant q \text{ oraz } q \leqslant p.$$

Jeśli relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to relacja $\cong$ zawiera relację równości. Klasę abstrakcji elementu $p \in \mathbb{Q}$ będziemy oznaczali $[p]$, zaś rodzinę wszystkich klas abstrakcji $[\mathbb{Q}]$. Będziemy pisali $[p] \leqslant [q]$ gdy $p \leqslant q$. Relacja $\leqslant$ między klasami równoważności nie zależy od wyboru reprezentantów, a więc jest częściowym porządkiem na $[\mathbb{Q}]$. Ten częściowy porządek będziemy oznaczali $([\mathbb{Q}], \leqslant)$ oraz nazywali *ilorazem* $(\mathbb{Q}, \leqslant)$. Nadmieńmy, że częściowy porządek $([\mathbb{Q}], \leqslant)$ jest odpowiednikiem terminu separative quotient z książki [25].

Nietrudno sprawdzić, że klasa abstrakcji ustalonego elementu względem relacji $\leqslant$ jest zawarta w klasie abstrakcji tego samego elementu względem relacji $\leqslant_i$. To natychmiast daje

$$([\mathbb{Q}], \leqslant) \subset_c (\mathbb{Q}, \leqslant).$$

W wielu rozważanych tutaj przypadkach nie będziemy rozróżniali separatywnej modyfikacji od ilorazu tej modyfikacji, w szczególności, gdy będzie miało jedynie formalny charakter.

4.4. **O gęstościach.** Omówmy jeszcze przykład który wskazuje na to, że gęstości częściowego porządku oraz jego separatywnej modyfikacji mogą mieć inne charakterystyki kardynalne. Niech $\Theta = \{H_\alpha : \alpha < h\}$ będzie macierzą bazową - ogólną definicję macierzy bazowej podamy później, tutaj wystarczy przyjąć, że mowa o "base matrix" z artykułu [2, str. 13] - dla $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ taką, że jeśli $\alpha < \beta < h$, to dowolny element należący do H_α zawiera continuum wiele elementów z H_β. Dodatkowo załóżmy, że dowolne dwa elementy z $\bigcup \Theta$ są prawie rozłączne albo jeden z nich jest prawie zawarty w drugim.

Stwierdzenie 17. *Częściowy porządek* $(\bigcup \Theta, \subseteq^*)$ *jest separatywny oraz izomorficzny z częściowym porządkiem* $(\{A^* : A \in \bigcup \Theta\}, \subseteq)$.

Dowód. Niech $A, B \in \bigcup \Theta$ będą takie, że nieprawdą jest $A \subseteq^* B$. Jeśli zbiory A oraz B są prawie rozłączne, to są one nieporównywalne w sensie relacji $\subseteq^*$. Gdy z kolei $B \subseteq^* A \in H_\alpha$ oraz $B \in H_\beta$, to $\alpha < \beta$. Do H_α należy continuum wiele zbiorów z H_β prawie zawartych w A oraz innych niż B. Każdy z nich jest nieporównywalny z B. To kończy dowód separatywności.

Funkcja $A \mapsto A^*$ po obcięciu do $\bigcup \Theta$ jest bijekcją, która zachowuje porządek: innymi słowy, jest szukanym izomorfizmem. □

Jeśli $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest separatywnym częściowym porządkiem oraz podzbiór $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ jest gęsty, to $(\mathbb{P}, \leqslant)$ jest także separatywnym częściowym porządkiem. Częściowy porządek $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ jest separatywny. Zbiór $\bigcup \Theta \subseteq [\omega]^\omega$ jest gęsty, a więc mamy kolejny argument uzasadniający separatywność $(\bigcup \Theta, \subseteq^*)$.

Przedstawmy $\bigcup \Theta$ w postaci dwóch rozłącznych zbiorów gęstych w sensie inkluzji. Można to zrobić poprzez indukcję pozaskończoną:

- Ustawiamy wszystkie elementy $\bigcup \Theta$ w ciąg $\{V_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$;

- Najpierw wybieramy prawie rozłączne zbiory $A_\emptyset$ oraz $B_\emptyset$ prawie zawarte $V_\emptyset$;
- Na kroku α-tym wybieramy prawie rozłączne zbiory A_α oraz B_α tak, aby $A_\alpha, B_\alpha \subseteq^* V_\alpha$ oraz
$$\{A_\alpha, B_\alpha\} \subseteq \bigcup\Theta \setminus \{A_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta < \alpha\};$$
- Niech $X = \{A_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ oraz $Y = \bigcup\Theta \setminus X$;
- Dostajemy podział $\bigcup\Theta$ na dwa zbiory gęste.

Niech $D^{2^\mathfrak{c}}$ będzie kostką Cantora o ciężarze $2^\mathfrak{c}$, patrz [13, str. 114]. Ustalmy injekcję $f : Y \to D^{2^\mathfrak{c}}$, której obraz jest gęsty w $D^{2^\mathfrak{c}}$. Jest to możliwe, wobec twierdzenia Hewitta-Marczewskiego-Pondiczery'ego, [13, str. 110]. Rozważmy rodzinę $\mathcal{K}$ złożoną ze zbiorów postaci
$$V^\#(s_1, s_2, \ldots, s_n) = V^* \cap (X \cup f^{-1}(p_{s_1}^{-1}(0) \cap p_{s_2}^{-1}(0) \cap \ldots \cap p_{s_n}^{-1}(0))),$$
gdzie $s_1, s_2, \ldots, s_n \in 2^\mathfrak{c}$ oraz $V \in \bigcup\Theta$. Jest to rodzina mocy $2^\mathfrak{c}$ zamknięta na niepuste przekroje skończone.

Twierdzenie 18. *Częściowy porządek* $(\mathcal{K}, \subseteq)$ *nie jest separatywny. Iloraz jego separatywnej modyfikacji jest izomorficzny z częściowym porządkiem* $(\bigcup\Theta, \subseteq^*)$. *Dowolny zbiór gęsty w* $\mathcal{K}$ *jest mocy* $2^\mathfrak{c}$.

Dowód. Ustalmy zbiór $V \in \bigcup\Theta$ oraz współrzędne $s_1, s_2, \ldots, s_n \in 2^\mathfrak{c}$. Sprawdzamy, że $i(V^\#(s_1, s_2, \ldots, s_n))$ składa się z $2^\mathfrak{c}$ elementów postaci $U^\#(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, gdzie $U \in \bigcup\Theta$, współrzędne $t_1, t_2, \ldots, t_k \in 2^\mathfrak{c}$ są dowolne oraz $U^* \subseteq V^*$. Rzeczywiście, ustalmy $W \in \bigcup\Theta$ takie, że $W^\#(k_1, k_2, \ldots, k_m) \subseteq U^\#(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Wtedy $W^* \subseteq U^* \cap V^*$, a stąd dostajemy, że $W^\#(k_1, k_2, \ldots, k_m, t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_n)$ jest podzbiorem
$$U^\#(t_1, t_2, \ldots, t_k) \cap V^\#(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$
Innymi słowy nie zachodzi $U^\#(t_1, t_2, \ldots, t_k) \perp V^\#(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Odwzorowanie $i(V^\#(s_1, s_2, \ldots, s_n)) \mapsto V^*$ jest postulowanym izomorfizmem.

Jeśli zbiór $G \subseteq \mathcal{K}$ jest gęsty, to wszystkie współrzędne $s_i \in 2^\mathfrak{c}$ są uwzględniane w definicjach elementów $V^\#(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in G$, a więc G musi być mocy $2^\mathfrak{c}$. □

4.5. **Antyłańcuchy.** Maksymalną rodzinę $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{Q}$, złożoną z elementów parami nieporównywalnych będziemy nazywali *antyłańcuchem*. Jeśli relacja częściowego porządku jest zwrotna, to (patrz fakt 9) rodzina

$\mathcal{W} \subseteq \mathbb{Q}$ jest antyłańcuchem, o ile jest maksymalna oraz dla dowolnych $p, q \in \mathcal{W}$, gdzie $q \neq p$, zachodzi $i(p) \cap i(q) = \emptyset$. Wobec Pewnika Wyboru, każda rodzina złożona z elementów nieporównywalnych jest zawarta w antyłańcuchu. W literaturze, dla przykładu [33, str. 53], łańcuchami bywają nazywane rodziny elementów nieporównywalnych - nie jest na nie nakładany warunek maksymalności. W książce [6, str. 89] nazwę antyłańcuch zarezerwowano dla innych rodzajów rodzin. Kolejny lemat jest analogiczny (podobny) do lematu 3.3 [33, str. 63].

Twierdzenie 19. *Porządek w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest separatywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego antyłańcucha $\mathcal{A}$ oraz dowolnego $y \in \mathbb{Q}$ takiego, że y jest zgodny z dokładnie jednym $q \in \mathcal{A}$ zachodzi $y \leqslant q$.*

Dowód. Załóżmy, że porządek $\leqslant$ jest separatywny. Ustalmy antyłańcuch $\mathcal{A}$ oraz $y \in \mathcal{A}$. Niech $q \in \mathbb{Q}$ będzie nieporównywalne z każdym elementem z $\mathcal{A} \setminus \{y\}$. Gdyby q nie było mniejsze niż y, to istniałoby $x \leqslant q$ takie, że $x \perp y$. Skoro $\mathcal{A}$ jest antyłańcuchem, to x musi być zgodne z jakimś elementem $z \in \mathcal{A} \setminus \{y\}$. Czyli z jest zgodne z q, co daje sprzeczność.

Załóżmy, że porządek $\leqslant$ nie jest separatywny. Ustalmy $q, y \in \mathbb{Q}$ takie, że nie zachodzi $q \leqslant y$ oraz dowolne $x \leqslant q$ jest zgodne z y. Niech $\mathcal{A}$ będzie antyłańcuchem takim, że $y \in \mathcal{A}$. Wtedy q byłoby nieporównywalne z dowolnym $z \in \mathcal{A}$ innym niż y. □

4.6. **Topologia, a separatywna modyfikacja.** Separatywną modyfikację można także definiować w oparciu o twierdzenie 15. Inna możliwość to skorzystanie z właściwości zbiorów regularnie otwartych, co można zrobić jak następuje.

Zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ można utożsamiać z przestrzenią topologiczną. Mianowicie, $\mathbb{Q}$ możemy wyposażyć w najsłabszą topologię dla której wszystkie przedziały

$$\{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant p\} = (\leftarrow, p]$$

są otwarte. Przy czym, rodzina wszystkich przedziałów $(\leftarrow, p]$ jest bazą tej topologii. W drugą stronę, gdy $\mathbb{Q}$ jest przestrzenią topologiczną, to kładziemy $p \leqslant q$ wtedy i tylko wtedy, gdy p należy do każdego otwartego otoczenia q. Zatem topologia wraz z relacją inkluzji wyznacza w naturalny sposób częściowy porządek.

Twierdzenie 20. *Niech* $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowany. Jeśli* $\mathbb{Q}$ *wyposażymy w topologię generowaną przez rodzinę wszystkich przedziałów, to*

$$\{q \in \mathbb{Q} : i(q) \subseteq i(p)\} = \operatorname{Int} \operatorname{cl}((\leftarrow, p]),$$

dla dowolnego $p \in \mathbb{Q}$.

Dowód. Przypuśćmy, że $i(q) \subseteq i(p)$. Wtedy $q \in i(p)$, na podstawie faktu 7. To, wobec definicji $i(p)$, daje $(\leftarrow, y] \cap (\leftarrow, p] \neq \emptyset$, dla wszelkich $y \leqslant q$. Dostajemy $(\leftarrow, q] \subseteq \operatorname{cl}((\leftarrow, p])$.

Jeśli $q \in \operatorname{Int} \operatorname{cl}((\leftarrow, p])$, to $(\leftarrow, q] \subseteq \operatorname{cl}((\leftarrow, p])$. Skąd wnioskujemy, że $(\leftarrow, z] \cap (\leftarrow, p] \neq \emptyset$, dla wszelkich $z \leqslant q$. To, wobec definicji $i(p)$, daje $q \in i(p)$. Wobec faktu 11, dostajemy $i(q) \subseteq i(p)$. □

Innymi słowy, w powyższym stwierdzeniu ustalono, że zbiór

$$\{q \in \mathbb{Q} : i(q) \subseteq i(p)\}$$

jest wnętrzem domknięcia przedziału $(\leftarrow, p]$. Przy czym, zakładamy tam, że częściowy porządek jest relacją zwrotną.

4.7. **Aksjomatyczne ujęcie relacji $\perp$.** Jak zauważyliśmy w twierdzeniu 15 relacja $\perp$ w pełni charakteryzuje separatywny częściowy porządek. Gdy $x \perp y$, to elementy x oraz y nazywaliśmy nieporównywalnymi: innymi słowy, nieporównywalność definiowaliśmy w terminach relacji częściowego porządku $\leqslant$, którego własności były ustalone aksjomatycznie. Możliwym jest odwrócenie tej kolejności. Za punkt wyjścia proponujemy następującą aksjomatyzację.

Jeśli $\perp$ jest relacją na zbiorze $\mathbb{Q}$, to symbolem $\perp(q)$ oznaczamy wszystkie punkty należące do $\mathbb{Q}$ będące z q w relacji $\perp$. Gdy istnieje punkt $y \in \mathbb{Q}$ taki, że $\perp(p) \cup \perp(q) \subseteq \perp(y)$, to będziemy mówili, że q oraz p są *ograniczone* względem relacji $\perp$ przez punkt y, lub w skrócie q oraz p są ograniczone. W przeciwnym przypadku punkty q oraz p są *nieograniczone.*

Parę $(\mathbb{Q}, \perp)$ będziemy nazywali *prostopadłością,* jeśli $\perp$ jest relacją na $\mathbb{Q}$ taką, że $p \in \perp(q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkty q oraz p są nieograniczone względem relacji $\perp$: innymi słowy, $p \notin \perp(q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $y \in \mathbb{Q}$ taki, że

$$\perp(p) \cup \perp(q) \subseteq \perp(y),$$

tj. q oraz p są ograniczone względem relacji $\perp$ przez punkt $y \in \mathbb{Q}$. W skrócie, relację $\perp$ także będziemy nazywali *prostopadłością*. Relacja prostopadłości jest przeciwzwrotna - bo zawsze $p \notin \perp(p)$, oraz symetryczna - bo $p \in \perp(q)$ implikuje $q \in \perp(p)$.

Jeśli para $(\mathbb{Q}, \perp)$ jest prostopadłością, to możemy określić następujące relacje:

- $q \ll p$, gdy $\perp(p) \subseteq \perp(q)$;
- $p \perp_{\ll} q$, gdy p oraz q są nieporównywalne względem relacji $\ll$, czyli nie istnieje $y \in \mathbb{Q}$ taki, że $y \ll p$ oraz $y \ll q$.

Nadmieńmy, że nieporównywalność względem relacji $\ll$ jest tym samym, co nieograniczoność w sensie relacji $\perp$.

Twierdzenie 21. *Jeśli para* $(\mathbb{Q}, \perp)$ *jest prostopadłością, to relacja* $\ll$ *jest separatywnym częściowym porządkiem takim, że relacje* $\perp$ *oraz* $\perp_{\ll}$ *są tożsame.*

Dowód. Przechodniość oraz zwrotność relacji $\ll$ wynika bezpośrednio ze zwrotności oraz przechodniości relacji odwrotnej do inkluzji.

Aby uzasadnić separatywność $\ll$ przypuśćmy, że nie zachodzi $p \ll q$. Wtedy istnieje $y \in \perp(q) \setminus \perp(p)$. Skoro $y \notin \perp(p)$, to dobieramy $z \in \mathbb{Q}$ tak, aby $\perp(p) \cup \perp(y) \subseteq \perp(z)$, a więc także $z \ll p$. Punkty z oraz q są nieporównywalne względem relacji $\ll$. Gdyby istniało $z' \ll z$ takie, że $z' \ll q$ to dostalibyśmy $\perp(y) \cup \perp(q) \subseteq \perp(z')$, ale to przeczy $y \in \perp(q)$.

Punkty p oraz q są nieograniczone względem relacji $\perp$ (innymi słowy, są w relacji $\perp$) gdy nie istnieje $y \in \mathbb{Q}$ takie, że $\perp(y) \supseteq \perp(p) \cup \perp(q)$: innymi słowy, nie istnieje $y \in \mathbb{Q}$ takie, że $\perp(p) \subseteq \perp(y)$ oraz $\perp(q) \subseteq \perp(y)$. Ale to znaczy, że nie istnieje $y \in \mathbb{Q}$ takie, że $y \ll p$ oraz $y \ll q$. Wtedy punkty p oraz q są nieporównywalne względem relacji $\ll$, a więc są w relacji $\perp_{\ll}$. To uzasadnia $\perp = \perp_{\ll}$. $\square$

Twierdzenie 22. *Jeśli* $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ *jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz relacja* $\leqslant$ *jest zwrotna, to relacje* $\ll$ *oraz* $\leqslant_i$ *są identyczne.*

Dowód. Przypuśćmy, że $p \ll q$ oraz nie zachodzi $p \leqslant_i q$: innymi słowy, $\perp(q) \subset \perp(p)$ oraz istnieje $y \in i(p)$ takie, że $y \notin i(q)$. Wtedy, z powodu założenia $y \notin i(q)$, istnieje $z \leqslant y$ takie, że $z \perp q$. Skoro $y \in i(p)$ oraz $z \leqslant y$, to $z \notin \perp(p)$. Czyli $z \in \perp(q) \setminus \perp(p)$, co przeczy $p \ll q$.

Przypuśćmy, że $p \leqslant_i q$ oraz nie zachodzi $p \ll q$: innymi słowy $i(p) \subset i(q)$ oraz istnieje $y \perp q$ takie, że $y \notin \perp(p)$. Wtedy, z powodu założenia $y \notin \perp(p)$, istnieje $z \leqslant y$ takie, że $z \leqslant p$. Skoro $y \perp q$ oraz $z \leqslant y$, to $z \perp q$. Czyli $z \notin i(q)$. To daje sprzeczność z $p \leqslant_i q$, bo $z \leqslant p$ implikuje $z \in i(p)$. □

4.8. **Podziękowania.** Z pojęciem separatywnej modyfikacji zetknęłam się w trakcie wykładów profesora Bohuslava Balcara w grudniu 2008 roku w Katowicach. Z późniejszej korespondencji internetowej dowiedziałam się, że jest to pojęcie znane i używane, ale nie jest szczegółowo opisane w literaturze. Profesorom B. Balcarowi i T. Pazakowi dziękuję za wskazówki, które wykorzystałam w tym rozdziale. Miedzy innymi te, które pozwoliły na formalne rozróżnienie separatywnej modyfikacji od ilorazu częściowego porządku względem relacji $\leqslant_i$. A także i to, że prostopadłość zawiera wszelką niezbędną informację potrzebną i używaną w teorii forcingu.

5.1. Uwagi ogólne o technice macierzy rozrywającej. B. Balcar, J. Pelant oraz P. Simon w pracach [2] oraz [3] wprowadzili technikę tzw. shattering matrix do badania inwariantów kardynalnych przestrzeni topologicznych, a także zbiorów częściowo uporządkowanych oraz algebr Boole'a. Słowniki objaśniają znaczenie słowa shattering przymiotnikami druzgocący, wstrząsający, itd. W tej rozprawie wprowadzimy nazwę macierz rozrywająca. W pracach [2], [3], [27] oraz [29], itd. technika macierzy rozrywających była stosowana zwykle przy założeniu, że relacja częściowego porządku to inkluzja zbiorów regularnie otwartych lub porządek w algebrze Boole'a. Zręby ogólnej teorii tej techniki zaprezentowano w pracy M. Repický [49, 0.1 Theorem], a także w rozprawie doktorskiej M. Machury. Separatywność zakładano tam niejawnie lub rozważane przykłady były separatywne. Z naszego rozeznania wynika, że drobiazgowa analiza założeń dotyczących separatywności wypełnia lukę istniejącą w literaturze.

5.2. Liczba kardynalna $\kappa(\mathbb{Q})$. Niech $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeśli G oraz H są antyłańcuchami, to będziemy pisali $G \prec H$ gdy dla dowolnego $p \in G$ istnieje $q \in H$ takie, że $p \leqslant q$. Relacja $\prec$ to tzw. *wpisywanie.*

Ustalmy antyłańcuchy G oraz H. Rozważmy zbiór

$$D(G,H) = \{x \in \mathbb{Q} : \exists_{g\in G}\exists_{h\in H}(x \leqslant g \text{ oraz } x \leqslant h)\}.$$

Stwierdzenie 23. *Zbiór $D(G,H)$ jest gęsty.*

Dowód. Gdy $y \in \mathbb{Q}$, to istnieje $g \in G$ zgodne z y. Czyli istnieje $x \in \mathbb{Q}$ takie, że $x \leqslant g$ oraz $x \leqslant y$. Istnieje także $h \in H$ zgodne z x. Czyli istnieje $p \in \mathbb{Q}$ takie, że $p \leqslant x$ oraz $p \leqslant h$. Dostajemy $p \leqslant y$ oraz $p \in D(G,H)$. □

Stwierdzenie 24. *Wpisywanie antyłańcuchów jest relacją skierowaną.*

Dowód. Ustalmy antyłańcuchy G oraz H oraz maksymalną rodzinę $K \subseteq D(G,H)$ złożoną z elementów parami nieporównywalnych. Z gęstości $D(G,H)$ natychmiast wynika, że K jest antyłańcuchem wpisanym w G oraz H. □

Będziemy pisali $G \prec^i H$ gdy dla dowolnego $p \in G$ istnieje $q \in H$ takie, że $i(p) \subseteq i(q)$.

Stwierdzenie 25. *Jeśli relacja częściowego porządku $\leqslant$ jest zwrotna oraz separatywna, to*

$$\leqslant = \leqslant_i \text{ oraz } \prec = \prec^i .$$

Dowód. Równości są natychmiastową konsekwencją faktu 12. □

Wobec faktu 8, relacja $\prec^i$ zawiera relację $\prec$. Niekoniecznie zachodzi zawieranie odwrotne. Przykładem niech będzie rodzina otwartych podzbiorów prostej uporządkowana inkluzją. Jednoelementowe antyłańcuchy $\{(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)\}$ oraz $\{(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\}$ są nieporównywalne względem inkluzji, lecz porównywalne względem jej separatywnej modyfikacji.

Kolekcję antyłańcuchów $\mathcal{B} = \{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ będziemy nazywali *macierzą rozrywającą* gdy dla dowolnego $p \in \mathbb{Q}$ istnieje $\alpha < \lambda$ taka, że p jest zgodny z co najmniej dwoma elementami z H_α. Jeżeli macierz rozrywająca istnieje, to najmniejszą liczbę kardynalną równoliczną z macierzą rozrywającą będziemy oznaczali $\kappa((\mathbb{Q}, \leqslant))$, lub krócej $\kappa(\mathbb{Q})$.

Nie każdemu zbiorowi częściowo uporządkowanemu $\mathbb{Q}$ można przyporządkować liczbę kardynalną $\kappa(\mathbb{Q})$. Dla przykładu, gdy $\mathbb{Q}$ jest liniowo uporządkowany, to wszelkie antyłańcuchy są jednoelementowe. Liczba kardynalna $\kappa(\mathbb{Q})$ ma sens jedynie wtedy, gdy dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$ istnieją dwa elementy zgodne z q, lecz nieporównywalne między sobą.

Lemat 26. *Niech $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ będzie podzbiorem gęstym w zbiorze częściowo uporządkowanym $\mathbb{Q}$. Jeśli $\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ jest macierzą rozrywającą dla $\mathbb{Q}$, to istnieje także macierz rozrywająca $\mathcal{B}$ mocy λ taka, że $\bigcup \mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}$.*

Dowód. Dla każdego H_α dobieramy antyłańcuch $G_\alpha \subseteq \mathbb{P}$ taki, że $G_\alpha \prec H_\alpha$. Rodzina $\{G_\alpha : \alpha < \lambda\}$ to macierz rozrywająca, której potrzebujemy. □

Jeśli X jest przestrzenią metryczną, to $\kappa(X) = \kappa(\mathbb{Q}) = \omega$; o ile topologię oznaczymy $\mathbb{Q}$, zaś relację inkluzji $\leqslant$. Rzeczywiście, gdy H_n jest maksymalną rodziną kul rozłącznych o średnicach mniejszych niż $\frac{1}{n}$, to rodzina $\{H_n : n < \omega\}$ jest matrycą rozrywającą.

Dla kostek Cantora D^m - oznaczania jak w [13, str. 116], gdzie m jest nieskończoną liczbą kardynalną - zachodzi $\kappa(D^m) = \omega$. Rodzina $\{\mathcal{H}_n : n < \omega\}$ jest matrycą rozrywającą dla D^m, o ile każde $\mathcal{H}_n$ to maksymalna rodzina rozłącznych zbiorów bazowych postaci $\prod_{s \in m} W_s$, gdzie $W_s \neq D$ dla skończonej ilości indeksów $s \in m$, ale w większej liczbie niż n.

5.3. **Macierze rozrywającej mocy nieprzeliczalnej.** W pracy [2] pokazano, że dla niektórych porządków (ważnych, często omawianych) moc macierzy rozrywającej może być nieprzeliczalna. Dotyczyło to nierówności $\omega_1 \leqslant \kappa(([\omega]^\omega, \subseteq^*)) = h$. Najistotniejszym narzędziem dowodu tej nierówności jest tzw. Base Matrix Lemma [2, str. 14]. Ta technika została uogólniona na algebry Boole'a w [3, Theorem 1.13], a także powtórzone pod nazwą *Base Tree* [3, Theorem 3.4]. Okazuje się, że bezpośrednie stosowanie takich uogólnień jest kłopotliwe, porównaj [27] lub [29]. Dlatego powtarzamy najistotniejsze kroki tej techniki, zwracając uwagę na separatywność oraz zwrotność rozważanego częściowego porządku.

Rozważmy następującą własność zbiorów częściowo uporządkowanych, w których są macierze rozrywające:

$$\kappa((\mathbb{Q}, \leqslant)) = \kappa((\{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant p\}, \leqslant)),$$

dla wszelkich $p \in \mathbb{Q}$. Jest ona niewątpliwie spełniona w częściowych porządkach $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ takich, że w dowolnym zbiorze postaci

$$\{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant p\}$$

jest zawarty gęsty podzbiór izomorficzny z $\mathbb{Q}$. Tak jest w przypadku $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$. Własność tą będziemy nazywali *κ-jednorodnością.* Dodajmy jeszcze i to, że zbiór częściowo uporządkowany

$$(\{\langle A, B\rangle^* : A \subset B \text{ oraz } B \setminus A \in [\omega]^\omega\}, \subseteq)$$

jest κ-jednorodny.

Twierdzenie 27. *Jeśli zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest κ-jednorodny oraz relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to istnieje macierz rozrywająca mocy κ dobrze uporządkowana przez $\prec^i$.*

Dowód. Niech $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ będzie macierzą rozrywającą. Kładziemy $H_0 = G_0$. Załóżmy, że dla $\lambda < \kappa$ określona jest rodzina antyłańcuchów $\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ dobrze uporządkowana przez relację $\prec^i$. Niech $\mathbb{Q}_\lambda \subseteq \mathbb{Q}$ składa się z takich $q \in \mathbb{Q}$, które są zgodne z dokładnie jednym elementem H_α dla dowolnego $\alpha < \lambda$, a także z dokładnie jednym elementem należącym do G_λ. Wobec κ-jednorodności, zbiór $\mathbb{Q}_\lambda$ jest gęsty w $\mathbb{Q}$. Rzeczywiście, gdy $y \in \mathbb{Q}$, to niech

$$Y_{\alpha,\lambda} \subset \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant y\} \cap D(H_\alpha, G_\lambda)$$

będzie antyłańcuchem relatywnie względem $\{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant y\}$. Wobec κ-jednorodności macierz $\{Y_{\alpha,\lambda} : \alpha < \lambda\}$ nie jest rozrywająca względem $\{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant y\}$, a więc istnieje $p \leqslant y$ takie, że $p \in \mathbb{Q}_\lambda$.

Niech $H_\lambda \subset \mathbb{Q}_\lambda$ będzie antyłańcuchem. Wobec twierdzeń 66 oraz 19, rodzina antyłańcuchów $\{H_\alpha : \alpha < \kappa\}$ jest dobrze uporządkowana przez $\prec^i$, a także jest macierzą rozrywającą, bo stale $H_\lambda \prec^i G_\lambda$. □

Relacja $\prec^i$ pojawia się naturalnie w dowodzie powyższego twierdzenia. Motywuje ona potrzebę badania właściwości separatywnych modyfikacji częściowych porządków. Gdy rozważamy separatywny częściowy porządek, to w powyższym twierdzeniu, na podstawie stwierdzenia 25, relację $\prec^i$ można zastąpić wpisywaniem antyłańcuchów, czyli relacją $\prec$.

W języku opartym o relację prostopadłości - czyli po ustaleniu prostopadłości $(\mathbb{Q}, \perp)$, macierz rozrywającą można określić jak następuje. Niech $\mathcal{B} = \{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ będzie kolekcją złożoną z maksymalnych zbiorów spójnych w sensie relacji $\perp$: Spójność względem relacji znaczy, że dowolne dwa elementy są w relacji. Wtedy macierz $\mathcal{B}$ jest rozrywająca, gdy nie istnieje $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $q \notin \perp(p)$ dla dokładnie jednego $p \in H_\alpha$ oraz wszystkich $\alpha < \lambda$. Zaś dobre uporządkowanie w sensie relacji $\prec^i$ to wpisywanie względem relacji $\ll$.

5.4. **Rozdrabnialność.** Rozważana w tym podrozdziale własność jest równoważna istnieniu macierzy rozrywającej.

Lemat 28. *Jeśli relacja $\leqslant$ jest zwrotna, to następujące warunki są równoważne:*

(1) *Dla dowolnego $p \in \mathbb{Q}$ istnieją dwa nieporównywalne elementy $q, r \in \mathbb{Q}$ takie, że $i(q) \subseteq i(p)$ oraz $i(r) \subseteq i(p)$;*
(2) *Dla dowolnego $p \in \mathbb{Q}$ istnieją dwa nieporównywalne elementy $q, r \in \mathbb{Q}$ takie, że $q \leqslant p$ oraz $r \leqslant p$.*

Dowód. Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1) natychmiast wynika z faktu 8.

Ustalmy elementy q, p oraz r takie, że $q \perp r$, $i(q) \subseteq i(p)$ oraz $i(r) \subseteq i(p)$. Skoro $q \in i(q) \subseteq i(p)$, to istnieje $q' \leqslant q$ takie, że $q' \leqslant p$. Analogicznie znajdujemy $r' \leqslant r$ takie, że $r' \leqslant p$. Ale $q \perp r$ pociąga $q' \perp r'$, co daje (1) $\Rightarrow$ (2). □

O częściowym porządku, który spełnia własności w powyższym stwierdzeniu będziemy mówili, że jest *rozdrabnialny*. Jeśli częściowy porządek $(\mathbb{Q}, \leqslant))$ jest κ-jednorodny, to jest rozdrabnialny. Co więcej:

Twierdzenie 29. *Częściowy porządek jest rozdrabnialny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz rozrywająca.*

Dowód. Ustalmy $q \in \mathbb{Q}$ oraz macierz rozrywającą Θ. Istnieje więc w Θ antyłańcuch do którego należą dwa elementy p oraz y zgodne z q. Wobec tej zgodności, istnieją elementy $p^* \leqslant q$ oraz $y^* \leqslant q$ takie, że $p^* \leqslant p$ oraz $y^* \leqslant y$. Ale p oraz y są różnymi elementami antyłańcucha, czyli $p \perp y$, a więc także $p^* \perp y^*$.

Dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ ustalamy dwa nieporównywalne elementy p oraz y takie, że $p \leqslant q$ oraz $y \leqslant q$. Rodzina antyłańcuchów $\{H_q : q \in \mathbb{Q}\}$ jest macierzą rozrywającą, o ile p oraz y zawsze należą do H_q. □

Wniosek 30. *Jeśli częściowy porządek $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest rozdrabnialny, to liczba kardynalna $\kappa(\mathbb{Q})$ jest nieskończona.*

Dowód. Niech rodzina antyłańcuchów $\{H_\alpha : \alpha < \kappa(\mathbb{Q})\}$ będzie macierzą rozrywającą. Ustalamy $p_0 \in H_0$. Gdy $p_0 \in H_1$, to kładziemy $p_0 = p_1$. W przeciwnym przypadku znajdujemy $q_1 \in H_1$ zgodne z p_0, a następnie dobieramy $p_1 \leqslant p_0$ takie, że $p_1 \leqslant q_1$. To postępowanie możemy powtarzać skończenie wiele razy. W n-tym kolejnym kroku dobieramy $p_n \leqslant p_{n-1}$ takie, że $p_{n-1} \leqslant q_n \in H_n$. Dla dowolnego $n \in \omega$, rodzina $\{H_k : k \leqslant n\}$ nie jest macierzą rozrywającą: p_n nie może być zgodne z dwoma nieporównywalnymi elementami należącymi do $\bigcup\{H_k : k \leqslant n\}$. □

Wniosek 31. *Jeśli $\kappa(\mathbb{Q}) = \omega$, to istnieje macierz rozrywająca dobrze uporządkowana przez wpisywanie antyłańcuchów.*

Dowód. Jeśli $\{H_n : n \in \omega\}$ jest macierzą rozrywającą, to kładziemy $H_0 = G_0$ oraz G_{n+1} niech będzie antyłańcuchem zawartym w $D(H_{n+1}, G_n)$. Macierz $\{G_n : n \in \omega\}$ jest rozrywająca oraz dobrze uporządkowana przez wpisywanie antyłańcuchów. $\square$

W języku topologii, rozdrabnialność tłumaczy się na następującą własność: *Dowolny niepusty zbiór otwarty zawiera dwa rozłaczne zbiory otwarte.* Gdy przestrzeń Hausdorffa nie zawiera punktów izolowanych, to spełnia tą własność. Dla takich przestrzeni możliwym jest wprowadzenie inwariantu kardynalnego, który odpowiadałby minimalnej mocy macierzy rozrywającej. Aktualnie, własności takiego inwariantu nie są zbyt dobrze poznane. W przypadku $([\omega]^\omega, \subseteq *)$ minimalna moc macierzy rozrywającej h tłumaczy się na addytywność ideału (r^0) złożonego ze zbiorów nigdziegęstych w topologii Ellentucka, patrz [48]. Analogiczny rezultat pokazaliśmy dla ideału (v^0), patrz dodatek lub [27, Corollary 3.2].

6.1. Warianty σ-ograniczoności. Przedyskutujemy możliwe założenia dotyczące ograniczoności z dołu ciągu elementów zbioru częściowo uporządkowanego. Jeśli $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to umiemy także określić relację $\leqslant_i$. Czyli możemy rozważać ograniczoność względem relacji $\leqslant$ bądź relacji $\leqslant_i$. Możliwe są także dwa kolejne warianty:

- *Separatywna σ-ograniczoność*: Jeśli stale $p_{n+1} \leqslant_i p_n$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $q \leqslant p_n$ dla każdego $n \in \omega$;
- *Słaba σ-ograniczoność*: Jeśli stale $p_{n+1} \leqslant p_n$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $q \leqslant_i p_n$ dla każdego $n \in \omega$.

Skoro relacja $\leqslant$ jest zawarta w relacji $\leqslant_i$, to natychmiast dostajemy nastepujące implikacje.

- Separatywna σ-ograniczoność implikuje σ-ograniczoność;
- Separatywna σ-ograniczoność implikuje słabą σ-ograniczoność;
- Separatywna σ-ograniczoność implikuje σ-ograniczoność względem relacji $\leqslant_i$;
- σ-ograniczoność implikuje słabą σ-ograniczoność;
- σ-ograniczoność względem relacji $\leqslant_i$ implikuje słabą σ-ograniczoność.

Gdy częściowy porządek $\leqslant$ jest separatywny oraz zwrotny, to wszystkie cztery warianty σ-ograniczoności są równoważne warunkowi: *Jeśli stale $p_{n+1} \leqslant p_n$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $q \leqslant p_n$ dla każdego $n \in \omega$*; czyli σ-ograniczoności. Bez separatywności warunek słabej σ-ograniczoności jest najogólniejszy. Sformułowaliśmy go, by dokładniej sprecyzować założenia w następującym twierdzeniu. Tam, a także w pozostałych faktach, nie będziemy dopisywali zwrotności do założeń, bo badamy jedynie zwrotne relacje częściowego porządku.

Twierdzenie 32. *Jeśli częściowy porządek $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ jest rozdrabnialny oraz słabo σ-ograniczony, to liczba kardynalna $\kappa(\mathbb{Q})$ jest nieprzeliczalna.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\{H_n : n < \omega\}$ jest macierzą rozrywającą dobrze uporządkowaną przez wpisywanie antyłańcuchów, patrz wniosek 31. Wybieramy ciąg o wyrazach $p_n \in H_n$ tak, aby zawsze $p_{n+1} \leqslant p_n$.

Jeśli stale $p \leqslant_i p_n$ - wobec słabej σ-ograniczoności takie p istnieje - to p nie może być zgodne z dwoma nieporównywalnymi elementami należącymi do $\bigcup\{H_n : n \in \omega\}$. Sprawdzamy to korzystając z implikacji: Jeśli $i(p) \subseteq i(q)$ oraz $q \perp y$, to nieprawdą jest $i(p) \subseteq i(y)$. □

W częściowym porządku $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ dowolny łańcuch malejący długości $\lambda < t$ jest ograniczony z dołu. Hipoteza $t > \omega_1$ jest zgodna z aksjomatami ZFC. Czyli zgodna z ZFC jest także hipoteza, że w $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ każdy łańcuch malejący długości ω_1 jest ograniczony z dołu. Takiej możliwości nie dopuszcza częściowy porządek

$$(\{\langle A, B\rangle^* : \langle A, B\rangle \text{ jest segmentem}\}, \subseteq).$$

W tym porządku zawsze istnieją nieograniczone łańcuchy długości ω_1. Takim łańcuchem jest rodzina

$$\{\langle A_\alpha, B_\alpha\rangle^* : \alpha < \omega_1\},$$

gdzie zbiory A_α oraz B_α tworzą tzw. lukę Hausdorffa. Luka Haudorffa to dwa ciągi $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset [\omega]^\omega$ oraz $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset [\omega]^\omega$ takie, że:

- Jeśli $\alpha < \beta$, to $A_\alpha \subseteq^* A_\beta \subseteq^* B_\beta \subseteq^* B_\alpha$;
- Nie istnieje C takie, że $A_\alpha \subseteq^* C \subseteq^* B_\alpha$ dla wszelkich $\alpha < \omega_1$.

Jak zauważył M. Scheepers [57, str. 13], po raz pierwszy takie ciągi skonstruował F. Hausdorff w artykule [?].

6.2. **$\mathfrak{c}$-rozdrabnialność.** Możliwe są także następujące wzmocnienia rozdrabnialności:

- *$\mathfrak{c}$-rozdrabnialność*: Dla dowolnego $p \in \mathbb{Q}$ istnieje rodzina $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{Q}$ mocy $\mathfrak{c}$ złożona z elementów parami nieporównywalnych takich, że jeśli $q \in \mathcal{W}$, to $q \leqslant p$;
- *Separatywna $\mathfrak{c}$-rozdrabnialność*: Dla dowolnego $p \in \mathbb{Q}$ istnieje rodzina $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{Q}$ mocy $\mathfrak{c}$ złożona z elementów parami nieporównywalnych takich, że jeśli $q \in \mathcal{W}$, to $i(q) \subseteq i(p)$.

W powyższych definicjach liczbę kardynalną $\mathfrak{c}$ można zastąpić jakąkolwiek inną liczbą. Dla przykładu, w twierdzeniu Kulpy-Szymańskiego założona jest β-rozdrabniałność, gdzie β może być liczbą kardynalną regularną oraz nieprzeliczalną. Nie zawsze jest to potrzebne.

Stwierdzenie 33. *Separatywna $\mathfrak{c}$-rozdrabnialność jest równoważna $\mathfrak{c}$-rozdrabnialności, a także $\mathfrak{c}$-rozdrabnialności względem separatywnej modyfikacji.*

Dowód. Dowód natychmiast wynika z faktów 7, 8 oraz twierdzenia 14. Można go także wyprowadzić bezpośrednio z implikacji: Jeśli $i(p) \cap i(q) = \emptyset$, $y \leqslant p$ oraz $x \leqslant q$, to $y \perp x$. $\square$

7.1. Definicja macierzy gęstej. Kolekcję antyłańcuchów

$$\mathcal{B} = \{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$$

taką, że suma $\bigcup \mathcal{B}$ jest gęsta w $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ będziemy nazywali *macierzą gęstą*. Gęstość jest rozumiana w sensie porządkowym: innymi słowy, dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$ istnieje $p \in \bigcup \mathcal{B}$ takie, że $p \leqslant q$. W języku opartym o relację prostopadłości, gęstość może być rozumiana jako gęstość względem relacji $\ll$, a więc jako gęstość względem separatywnej modyfikacji.

Jeśli $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{Q}$ jest podzbiorem gęstym, to istnieje macierz gęsta mocy nie większej niż $|\mathcal{G}|$ złożona z antyłańcuchów zawartych w $\mathcal{G}$. Czyli dowolnemu częściowemu porządkowi można przyporządkować liczbę kardynalną równą najmniejszej mocy macierzy gęstej. Suma macierzy gęstej oraz macierzy rozrywającej jest macierzą gęstą i rozrywającą, ale jej moc może być większa niż $\kappa(\mathbb{Q})$. W częściowym porządku $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ macierz gęsta jest rozrywająca. Co więcej, istnieją tam macierze gęste mocy $\kappa(([\omega]^\omega, \subseteq^*))$.

7.2. O drzewie bazowym, czyli o technice macierzy bazowej. Niech $\mathcal{B} = \{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ będzie macierzą gęstą oraz rozrywająca. Załóżmy dodatkowo, że nie istnieje macierz rozrywająca mocy mniejszej niż λ. Gdy antyłańcuchy H_α są dobrze uporządkowane przez wpisywanie, to macierz $\mathcal{B}$ będziemy nazywali *bazową*, porównaj [14, str. 97]. Macierz bazową $\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ taką, że:

Jeśli $\beta < \alpha < \lambda$ oraz $p \in H_\beta$, to zbiór $\{q \in H_\alpha : q \leqslant p\}$ jest mocy $\mathfrak{c}$;

będziemy nazywali *drzewem bazowym* częściowego porządku $\leqslant$. Następujące postępowanie poprawiania macierzy rozrywającej jest odpowiednikiem rozumowań dotyczących relacji $\subseteq^*$ oraz jej separatywnych uogólnień, [2, Lemma 2.11], [14, str. 95-98], [49, 0.1 Theorem] lub [27, Theorem 4.2].

Ustalmy zwrotny częściowy porządek $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ mocy $\mathfrak{c}$. Załóżmy dodatkowo, że jest on κ-jednorodny, separatywny oraz σ-ograniczony. Niech

$$\{G_\alpha : \alpha < \kappa(\mathbb{Q})\}$$

będzie macierzą rozrywającą dobrze uporządkowaną przez relację wpisywania antyłańcuchów. Macierz taka istnieje wobec twierdzenia 27, bo zakładamy separatywność. Kładziemy $H_0 = G_0$. Załóżmy, że dla $\lambda < \kappa$ określona jest rodzina antyłańcuchów $\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ dobrze uporządkowana przez relację wpisywania antyłańcuchów. Niech F_λ będzie antyłańcuchem wpisanym w G_λ oraz w dowolny antyłańcuch z rodziny $\{H_\beta : \beta < \lambda\}$. To, że antyłańcuch F_λ istnieje, można uzasadnić następująco. Macierz $\mathcal{B}_\lambda = \{H_\beta : \beta < \lambda\} \cup \{G_\lambda\}$ jest mocy mniejszej niż $\kappa(\mathbb{Q})$, a więc nie jest rozrywająca. Rodzina wszystkich elementów z $\mathbb{Q}$, które są porównywalne z dokładnie jednym elementem każdego antyłańcucha należącego $\mathcal{B}_\lambda$ jest gęsta. Gdy F_λ jest antyłańcuchem złożonym z elementów takiej rodziny, to - wobec separatywności - jest on wpisany w każdy antyłańcuch z $\mathcal{B}_\lambda$.

Niech $U_\lambda \subseteq \mathbb{Q}$ będzie rodziną wszystkich $q \in \mathbb{Q}$, które są zgodne z continuum wielu elementami z F_λ. Skoro $|\mathbb{Q}| \leqslant \mathfrak{c}$ to, także $|U_\lambda| \leqslant \mathfrak{c}$. Istnieje więc funkcja różnowartościowa $f : U_\lambda \to \mathbb{Q}$ taka, że $f(p) \leqslant p$ oraz $f(p) \leqslant q$ dla jakiegoś $q \in F_\lambda$. Niech H_λ będzie antyłańcuchem wpisanym z F_λ oraz zawierającym zbiór wartości funkcji f, tj. $f[U_\lambda]$. Macierz $\{H_\alpha : \alpha < \kappa(\mathbb{Q})\}$ jest gęsta oraz dobrze uporządkowana przez wpisywanie antyłańcuchów. Sprawdzamy to istotnie wykorzystując σ-ograniczoność oraz rozdrabnialność. Nadmieńmy jednak, że uzasadnienie gęstości wymaga triku, który dokładniej opisujemy poniżej, nieznacznie modyfikując "claim" z dowodu Base Matrix Lemma, [2, str. 14].

Ustalmy $p \in \mathbb{Q}$. Indukcyjnie definiujemy ciąg liczb porządkowych $\xi_1 < \xi_2 < \ldots$ taki, że

- Jeśli $f \in 2^n$, to istnieje element $p_f \in G_{\xi_n}$ zgodny z p;
- Jeśli $f, g \in 2^n$ oraz $f \neq g$, to $p_f \neq p_g$;
- Jeśli $f \in 2^n$, $g \in 2^m$ oraz $f = g_{|n}$, to $p_g \leqslant p_f$.

Liczba porządkowa $\xi = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$ jest mniejsza niż κ, a więc z σ-ograniczoności wynika, że $\mathfrak{c}$ elementów z G_ξ jest zgodne z p. W konsekwencji $p \in U_\xi$, a także $f(p) \in H_\xi$ oraz $f(p) \leqslant p$. Analogicznie znajdujemy liczbę porządkową $\mu < \kappa$ taką, że $\mathfrak{c}$-wiele elementów z H_μ jest poniżej p.

Podsumowując powyższą analizę dostajemy twierdzenie 34, którego uzasadnienie w całości przynależy do autorów artykułów [2] oraz [3]. Z analizy tej natychmiast wynika $\mathfrak{c}$-rozdrabnialność. Nadmieńmy także, że istnienie antyłańcucha F_λ wynika z separatywności. Tam korzystamy z następującej własności: *Gdy F jest antyłańcuchem oraz $p \perp q$ dla wszelkich $q \in F \setminus \{y\}$, to $p \leqslant y$.* Założenie, że dowolny antyłańcuch ma takie własności jest równoważne separatywności.

Twierdzenie 34. *Jeśli separatywny zwrotny częściowy porządek jest mocy continuum, κ-jednorodny oraz σ-ograniczony, to istnieje drzewo bazowe.*

Dowód. Niech $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ będzie częściowym porządkiem, o którym mowa w założeniach. Pozostało pokazać jak określoną powyżej macierz bazową $\{H_\beta : \beta < \kappa(\mathbb{Q})\}$ poprawić do drzewa bazowego.

Kładziemy $H_0 = D_0$. Gdy $\lambda < \kappa(\mathbb{Q})$ oraz antyłańcuchy $\{D_\beta : \beta < \lambda\}$ są określone, to niech E_λ będzie antyłańcuchem wpisanym w H_λ oraz w antyłańcuchy D_α, dla $\alpha < \lambda$. Wtedy D_λ niech będzie antyłańcuchem wpisanym w E_λ takim, że dowolne $q \in E_\lambda$ jest zastąpione maksymalną rodziną mocy $\mathfrak{c}$ złożoną z elementów mniejszych niż q oraz parami nieporównywalnych. Macierz $\{D_\alpha : \alpha < \kappa(\mathbb{Q})\}$ jest drzewem bazowym. □

Nasz wkład w twierdzenie 34 polega na podkreśleniu znaczenia separatywności. W literaturze dotyczącej teorii forcingu założenie separatywności bywa pomijane, gdyż wszelkie omawiane tam konsekwencje zależą od relacji $\perp$, innymi słowy, od separatywnej modyfikacji.

7.3. **Brak separatywności, a gęstość.** Gdy nie założymy separatywności, to możliwe są następujące rezultaty, w których można osłabić także założenie σ-ograniczoności.

Wniosek 35. *Jeśli zwrotny częściowy porządek $\leqslant$ jest mocy continuum, κ-jednorodny oraz σ-ograniczony względem $\leqslant_i$, to istnieje drzewo bazowe względem $\leqslant_i$.*

Dowód. Moc oraz κ-jednorodność są zachowywane przez separatywną modyfikację, a więc wniosek jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia 34, polegającą na zastosowaniu tego twierdzenia do separatywnej modyfikacji. □

Kolejny wniosek różni się od powyższego wariantami ograniczoności oraz gęstości. Dowolny zbiór gęsty względem relacji $\leqslant$ jest także gęsty względem jej separatywnej modyfikacji, odwrotnie niekoniecznie.

Wniosek 36. *Jeśli zwrotny częściowy porządek jest mocy $\mathfrak{c}$, κ-jednorodny oraz separatywnie σ-ograniczony, to istnieje macierz gęsta dobrze uporządkowana przez wpisywanie względem separatywnej modyfikacji.*

Dowód. Jako, że κ-jednorodność zakłada rozdrabnialności, a więc zakłada także istnienie macierzy rozrywającej, patrz twierdzenie 29. Gdyby macierz rozrywająca była przeliczalna, to zgodnie z wnioskiem 31 istniałaby przeliczalna macierz rozrywająca uporządkowana przez wpisywania antyłańcuchów. Czyli ze słabej σ-ograniczoności - patrz twierdzenie 32 dostajemy, że macierz rozrywająca musi być nieprzeliczalna.

Jeśli w schemacie definiowania antyłańcuchów H_λ - tj. w schemacie poprawiania macierzy rozrywającej $\{G_\beta : \beta < \kappa(\mathbb{Q})\}$ opisanym przed twierdzeniem 34 - będziemy postulowali, by $H_\lambda \prec^i F_\lambda \prec^i G_\lambda$ oraz $F_\lambda \prec^i H_\beta$ dla $\beta < \lambda$, to dostaniemy macierz jakiej potrzebujemy. □

W powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z separatywności. Jednakże założenie co do mocy częściowego porządku jest istotne. Przykład, o którym mowa w twierdzeniu 18, spełnia pozostałe założenia wniosku 36. Tam nie ma macierzy gęstej, który byłaby dobrze uporządkowana przez wpisywanie względem separatywnej modyfikacji.

W artykule H. Judah, A. W. Miller oraz S. Shelah [26], w dowodzie "**Lemma 3.2**" określono następujący częściowy porządek:

Let $Q = \{\langle A_s : s \in \omega^{<\omega}\rangle : A_s \in [\omega]^\omega\}$ *and for* $A, B \in Q$ *define* $A \subseteq^* B$ *iff for all* $s \in \omega^{<\omega}$ $A_s \setminus B_s$ *is finite.*

Kombinatoryczne własności częściowego porządku $(Q, \subseteq^*)$ ułatwiły przeprowadzanie dowodów niektórych nierówności między niezmiennikami kardynalnymi związanymi z forcingiem Lavera. Elementy Q to ciągi, których wyrazy są nieskończonymi podzbiorami ω, ponumerowane skończonymi ciągami liczb naturalnych. Ciągi są w relacji $\subseteq^*$, gdy odpowiadające wyrazy są prawie zawarte jeden w drugim. Dodatkowo:

- Zbiór Q jest mocy continuum, tj. $|Q| = \mathfrak{c}$;
- Częściowy porządek $(Q, \subseteq^*)$ jest separatywny [Istotnie, jeśli $A, B \in Q$ oraz nie zachodzi $A \subseteq^* B$, to istnieje $s \in \omega^{<\omega}$ takie, że zbiór $C_s = A_s \setminus B_s$ jest nieskończony. Zamieniając w ciągu A wyraz A_s na C_s dostajemy ciąg $A' \in Q$ taki, że $A' \perp B$ oraz $A' \subseteq^* A$];
- Element $\Omega = \langle \Omega_s = \omega : s \in [\omega]^{<\omega}\rangle$ jest największy w Q;
- Jeśli $A \in Q$, to częściowy porządek
$$(\{B \in Q : B_s \subseteq A_s \text{ dla } s \in \omega^{<\omega}\}, \subseteq^*)$$
jest izomorficzny z $(Q, \subseteq^*)$, a więc $(Q, \subseteq^*)$ jest κ-jednorodny;
- $(Q, \subseteq^*)$ jest σ-ograniczony oraz $\mathfrak{c}$-rozdrabnialny.

Dla częściowego porządku $(Q, \subseteq^*)$, podobnie jak w [2, 2.11], istnieje macierz bazowa $\mathcal{B} = \{H_\alpha : \alpha < h_Q\}$. Zachodzi przy tym,
$$t \leqslant h_Q \leqslant h.$$
Nierówność $t \leqslant h_Q$ uzasadniamy nie wprost. Mianowicie, gdyby kolekcja $\{H_\alpha : \alpha < h_Q < t\}$ była macierzą bazową, to wybieramy ciąg elementów $A^\alpha \in H_\alpha$ taki, że $\beta < \alpha$ pociąga $A^\beta \subseteq^* A^\alpha$. Niech $B_s \in [\omega]^\omega$ będzie zbiorem prawie zawartym w każdym A^α_s. Następnie sprawdzamy, że nie istnieje $\alpha < h_Q$ takie, że $B = \{B_s : s \in [\omega]^{<\omega}\}$ jest większe od pewnego elementu H_α. Nierówność $h_Q \leqslant h$ uzasadniamy następująco. Jeśli $\{G_\alpha : \alpha < h\}$ jest macierzą gęstą dla częściowego porządku $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$, to budujemy macierz gęstą dla $(Q, \subseteq^*)$ tak, aby dla dowolnego $A \in H_\alpha$ wszelkich A_s należały do G_α. Dodajmy, że z artykułów

[53] oraz [54] wynika, iż hipoteza $h_Q < h$ jest zgodna z aksjomatami ZFC, porównaj [39, str. 8].

Powyżej nie korzystaliśmy z założenia $s \in [\omega]^{<\omega}$, czyli zbiór indeksów $[\omega]^{<\omega}$ może być zastąpione dowolnym innym zbiorem. Jak to zauważył M. Machura [39], wtedy będziemy mieli do czynienia z częściowymi porządkami $(C(X), \subseteq^\circ)$, gdzie X jest przestrzenią dyskretną. Gdyby $|X| \geqslant \lambda$ oraz $\mathfrak{c}^\lambda > \mathfrak{c}$, to dostalibyśmy częściowy porządek mocy większej niż $\mathfrak{c}$, a więc powyższymi metodami nie umielibyśmy zdefiniować macierzy bazowej. Mielibyśmy jednak wtedy σ-ograniczoność oraz κ-jednorodność. Nie znamy jednak odpowiedzi na pytanie: Czy istnieje macierz gęsta i rozrywająca dla $(C(X), \subseteq^\circ)$, o ile X jest przestrzenią dyskretną, $|X| = \lambda$ oraz $\mathfrak{c}^\lambda > \mathfrak{c}$?

Znaleźliśmy tylko jedno miejsce w literaturze [49, 0.1. Theorem] gdzie z ogólnych założeń o częściowym porządku wynika istnienie macierzy bazowej. To twierdzenie Repickiego stosuje się do częściowego porządku $(C(X), \subseteq^\circ)$, gdy X jest przestrzenią dyskretną, $\omega < |X| < \mathfrak{c}$ oraz $\mathfrak{c}^{|X|} = \mathfrak{c}$. W szczególności przy założeniu aksjomatu Martina, patrz [33, str. 51 - 65], $|X|$ może być dowolną nieprzeliczalną liczbą kardynalną mniejszą niż $\mathfrak{c}$. Wtedy dostajemy także istnienie drzewa bazowego.

9. Drzewa, korpus drzewa, topologia naturalna

Dotychczasowa część tej rozprawy polegała na uogólnianiu własności kombinatorycznych $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$. W pracy [27] zauważyliśmy, że częściowy porządek $(\{\langle A, B\rangle^* : \langle A, B\rangle$ jest segmentem$\}, \subseteq)$ można badać podobnymi technikami. Okazało się, że umożliwia to uzyskiwanie analogicznych rezultatów, które prezentujemy w dodatku, a także we fragmentach umieszczonych w różnych częściach tej rozprawy. Naszym kolejnym zamiarem jest dalsze rozwijanie tak wypracowanych technik w zakresie innych częściowych porządków wykorzystywanych w teorii forcingu. W szczególności w zakresie częściowych porządków określonych na rodzinach domkniętych podzbiorów liczb niewymiernych. Domknięte podzbiory liczb rzeczywistych można równoważnie opisywać jako drzewa. Także na elementy $[\omega]^\omega$ oraz segmenty można patrzeć jak na drzewa. Poniżej prezentujemy niezbędne pojęcia dotyczące teorii drzew, pozwalające zwięźle zarysować ich kombinatoryczne własności, a także dotyczące ich techniki.

Podzbiór $\mathbb{T} \subseteq Seq_X$ zamknięty na obcięcia do początkowych fragmentów, tzn. ciągów skończonych, oraz taki, że każdy jego element ma przedłużenia w $\mathbb{T}$ różniące się wartościami dla choć jednego wyrazu będziemy nazywali *drzewem*. Definicję drzewa - powszechnie stosowaną w literaturze - zacieśniamy do tzw. drzew doskonałych.

Bardziej formalnie, $\mathbb{T} \subseteq Seq_X$ jest drzewem, o ile dla dowolnego ciągu

$$t = (t(0), t(1), \ldots, t(n)) = \{(0, t(0)), (1, t(1)), \ldots, (n, t(n))\} \in \mathbb{T}$$

obcięcie t do n także należy do $\mathbb{T}$, czyli

$$(t(0), t(1), \ldots, t(n-1)) \in \mathbb{T};$$

Dla dowolnego $t = \{(0, t(0)), (1, t(1)), \ldots, (n, t(n))\} \in \mathbb{T}$ istnieją dwa różne wierzchołki $s, v \in \mathbb{T}$ takie, że $t(i) = s(i) = v(i)$, dla $0 \leqslant i \leqslant n$, oraz $s(n+k)) \neq v(n+k)$, dla jakiegoś $k > 0$. Przyjmujemy konwencję (zwyczajowe oznaczanie ciągów)

$$\{(0, t(0)), (1, t(1)), \ldots, (n, t(n))\} = (t(0), t(1), \ldots, t(n)).$$

Gdy $t \in Seq_X$ oraz $k \in X$, to symbolem $t^\frown k$ będziemy oznaczali sumę $t \cup \{(|t|, k)\}$, czyli *konkatenację* ciągów t oraz $\{(0, k)\}$. W szczególności, gdy $t = (t(0), t(1)), \ldots, t(n))$ oraz $k \in \omega$, to $t^\frown k$ oznacza ciąg

$\{(0,t(0)),(1,t(1)),\ldots,(n,t(n)),(n+1,k)\}$. Symbol $|t|$ oznacza liczbę wyrazów ciągu t, czyli moc zbioru t.

Gdy $t \in Seq_X$ oraz $n \leqslant |t|$, to symbolem $t_{|n}$ będziemy oznaczali obcięcie t do n, czyli ciąg $(t(0),t(1),\ldots,t(n-1))$.

Wierzchołek $t \in Seq_X$ jest *przedłużeniem* wierzchołka s, o ile $s(i)) = t(i)$ dla $0 \leqslant i < |s|$. Przy czym, t jest *bezpośrednim przedłużeniem* s, o ile $s^\frown k = t$ dla jakiegoś $k \in X$.

Wierzchołek $t \in \mathbb{T}$ będziemy nazywali *punktem rozgałęzienia* gdy ma on w $\mathbb{T}$ dwa bezpośrednie przedłużenia. Gdy wierzchołek t jest bezpośrednim przedłużeniem wierzchołka s, to punkt $t(|s|)$ będziemy nazywali następnikiem s.

Rząd wierzchołka $t \in \mathbb{T}$ to liczba jego bezpośrednich przedłużeń należących do $\mathbb{T}$.

Wierzchołek $t \in \mathbb{T}$ będziemy nazywali *pniem* drzewa $\mathbb{T}$, gdy dowolny inny wierzchołek $q \in \mathbb{T}$ jest z nim zgodny, czyli suma $t \cup q$ to ciąg należący do Seq_X, oraz w $\mathbb{T}$ są co najmniej dwa bezpośrednie przedłużenia t. Przyjęliśmy konwencję, że $\emptyset \in Seq_X$, a więc każde drzewo ma pień. Gdyby w drzewie były co najmniej dwa wierzchołki jednoelementowe, to pniem takiego drzewa jest zbiór pusty.

Ciąg nieskończony $f \in X^\omega$ będziemy nazywali *gałęzią* drzewa $\mathbb{T}$, o ile $f_{|n} \in \mathbb{T}$ dla wszelkich $n \in \omega$. Zbiór wszystkich gałęzi drzewa $\mathbb{T}$ będziemy oznaczali symbolem $[\mathbb{T}]$ oraz nazywali *korpusem*. Korpus to nazwa wprowadzona w tej rozprawie: innymi słowy, korpus drzewa $\mathbb{T} \subseteq Seq_X$ to zbiór

$$[\mathbb{T}] = \{f \in X^\omega : f_{|n} \in \mathbb{T} \text{ dla } n \in \omega\} \subseteq X^\omega.$$

Topologia naturalna (produktowa) na X^ω jest generowana przez rodzinę zbiorów postaci $[s] = \{f \in X^\omega : s \subseteq f\}$, gdzie $s \in Seq_X$. Rodzina generująca topologię naturalną jest zamknięta na skończone przekroje (Gdy $s \cup t \in Seq_X$, to $[s] \cap [t] = [s \cup t]$) lub $[s] \cap [t] = \emptyset$, o ile suma $s \cup t$ nie jest ciągiem), a więc jest bazą. Korpus dowolnego drzewa jest podzbiorem domkniętym i w sobie gęstym w X^ω.

Lemat 37. *Drzewo $\mathbb{T}$ ma korpus nigdziegęsty, wtedy i tylko wtedy gdy $[f_{|n}] \setminus [\mathbb{T}] \neq \emptyset$ dla wszelkich $f \in [\mathbb{T}]$ oraz $n \in \omega$.*

Dowód. Gdy $[\mathbb{T}]$ jest zbiorem nigdziegęstym, to $[\mathbb{T}]$ nie zawiera żadnego niepustego zbioru otwartego (bazowego). Czyli $[s] \setminus [\mathbb{T}] \neq \emptyset$ dla wszelkich $s \in Seq_X$, w tym także dla wszystkich $[f_{|n}]$, gdzie $f \in X^\omega$ (a więc także dla $f \in [\mathbb{T}]$).

Ustalmy zbiór bazowy $[s]$. Jeśli $s \notin \mathbb{T}$, to $[s] \cap [\mathbb{T}] = \emptyset$. Jeśli $s \in \mathbb{T}$, to ustalamy $f \in [\mathbb{T}]$ oraz $m \in \omega$ takie, że $f_{|m} = s$. Wobec założeń $[f_{|m}] \setminus [\mathbb{T}] \neq \emptyset$, a więc istnieje $t \in Seq_X$ takie, że $s = f_{|m} \subseteq t$ oraz $t \notin \mathbb{T}$. Czyli $[\mathbb{T}] \cap [t] = \emptyset$ oraz $[t] \subseteq [s]$. □

9.1. **Segmenty, $*$-segmenty.** W dodatku, czyli w pracy [27], badamy drzewa reprezentowane przez segmenty oraz $*$-segmenty. Segment $\langle A, B\rangle$ to zbiór postaci $\{X \in [\omega]^\omega : A \subseteq X \subseteq B\}$, gdzie $A \subset B$ oraz $B \setminus A \in [\omega]^\omega$. Wszystkie funkcje charakterystyczne zbiorów należących do segmentu $\langle A, B\rangle$ tworzą korpus drzewa w 2^ω: innymi słowy, zbiór utożsamiamy z określającą go funkcją charakterystyczną, tj. zbiór $Y \in [\omega]^\omega$ utożsamiamy z funkcją $f \in 2^\omega$ taką, że $f^{-1}(\{1\}) = Y$. Rodzina wszystkich takich drzew uporządkowana przez inkluzję to tzw. "Silver forcing", porównaj [35, Definition 1.1]. Wobec lematu 37 korpus drzewa reprezentowanego przez segment $\langle A, B\rangle$ jest zbiorem nigdziegęstym. Rzeczywiście, topologia naturalna na $[\omega]^\omega$ jest generowana (odpowiedniki zbiorów $[s]$) przez zbiory

$$\langle x, x \cup (\omega \setminus \sup x)\rangle = \{Y \in [\omega]^\omega : x \subset Y \subseteq x \cup (\omega \setminus \sup x)\},$$

gdzie x jest niepustym zbiorem skończonym. Jeśli $Y \in \langle A, B\rangle$ oraz $m \in \omega$, to zbiór $\langle Y \cap m, (Y \cap m) \cup (\omega \setminus m)\rangle$ (odpowiednik $f_{|m}$) nie jest zawarty w $\langle A, B\rangle$: Dla dowolnego $a \in A \setminus m$, zachodzi $Y \setminus a \notin \langle A, B\rangle$ oraz $Y \setminus a \in \langle Y \cap m, (Y \cap m) \cup (\omega \setminus m)\rangle$.

Z segmentami postaci $\langle A, B\rangle$ stowarzyszone są tzw. $*-$segmenty, czyli zbiory postaci $\langle A, B\rangle^* = \{X \in [\omega]^\omega : A \subseteq^* X \subseteq^* B\}$. Rodzina wszystkich $*-$segmentów uporządkowana przez inkluzję jest częściowym porządkiem, który posłużył w [27] do badania inwariantów kardynalnych związanych z ideałem (v^0). Wobec [27, Fact 2.2], dowolny malejący ciąg $*-$segmentów jest ograniczony. Dowolne dwa $*-$segmenty $\langle A, B\rangle^*$ oraz $\langle C, D\rangle^*$ takie, że równoliczne są zbiory $\omega \setminus B$, $\omega \setminus D$, a także A, C są izomorficzne oraz homeomorficzne w topologii dziedziczonej z topologii naturalnej. Stosowny izomorfizm, będący jednocześnie homeomorfizmem, ustala dowolna bijekcja ω na ω, która przeprowadza zbiór A na C, zbiór $B \setminus A$ na $D \setminus C$ oraz zbiór $\omega \setminus B$ na $\omega \setminus C$. Zachodzi także, patrz [28, str. 15], wersja faktu 51.

Lemat 38. *Dowolny $*-$segment zawiera contimuum wiele parami rozłącznych $*-$segmentów.*

Dowód. Ustalmy $*-$segment $\langle A, B\rangle^*$ oraz rodzinę $\mathcal{C}$ mocy continuum, złożoną z parami prawie rozłącznych podzbiorów zbioru $B \setminus A$. Dla każdego $D \in \mathcal{C}$ ustalmy zbiór nieskończony $D^- \subset D$ taki, że różnica $D \setminus D^-$ także jest nieskończona. Wówczas rodzina

$$\{\left\langle A \cup D^-, A \cup D\right\rangle^* : D \in \mathcal{C}\}$$

jest taka, jakiej potrzebujemy.

Rzeczywiście, jeśli $D, E \in \mathcal{C}$, to przekrój

$$\left\langle A \cup D^-, A \cup D\right\rangle^* \cap \left\langle A \cup E^-, A \cup E\right\rangle^*$$

jest pusty. Gdyby jakiś zbiór X należał do takiego przekroju, to $A \cup D^- \cup E^- \subseteq^* X$ oraz $X \subseteq^* A \cup (D \cap E) \subseteq^* A$; co jest niemożliwe, gdyż zbiór $D^- \cup E^-$ jest nieskończony. $\square$

Powyższe własności $*-$segmentów umożliwiają badanie właściwości forcingu Silvera metodami analogicznymi jak forcingu Mathiasa, patrz [48] oraz [46]. Analogicznie do tego jak w [26], [53] lub [54] możemy badać relację

$$\{\langle A, B\rangle^*_\alpha : \alpha < \lambda\} \leqslant \{\langle C, D\rangle^*_\alpha : \alpha < \lambda\},$$

gdzie $\langle A, B\rangle^*_\alpha \subseteq \langle C, D\rangle^*_\alpha$ dla wszystkich $\alpha < \lambda$. Gdy λ jest liczbą kardynalną taką, że $\mathfrak{c}^\lambda = \mathfrak{c}$, to dostajemy częściowy porządek mocy $\mathfrak{c}$, który jest rozdrabnialny, σ-ograniczony oraz κ-jednorodny. Wtedy można stosować twierdzenie 34. Jednakże o drzewach bazowych tak otrzymanych wiemy niewiele więcej niż to, co wynika z twierdzenia 60.

9.2. **Drzewa, a (ω, ω) luki.** To, że dowolny malejący ciąg $*-$segmentów jest ograniczony (patrz [27, Fact 2.2]) jest równoważne z twierdzeniem J. Hadamarda o nie istnieniu (ω, ω) luk. Jak podaje M. Scheepers [57] nie istnienie takich luk zostało po raz pierwszy odnotowane przez P. du Bois-Reymond (1873) oraz wyczerpująco udowodnione przez J. Hadamarda (1894). Wobec tego, że zawsze istnieją (ω_1, ω_1) luki (tzw. luki Hausdorffa, patrz [3, Twierdzenie 9.10] lub [57, Theorem 10]) istnieją pozaskończone ciągi malejące $*-$segmentów długości ω_1, które są nieograniczone, tzn. o pustym przekroju.

Dla drzew, odpowiednik twierdzenia o nie istnieniu (ω, ω) luk, niekoniecznie jest prawdziwy. Mianowicie, jeśli $\mathbb{T} \subseteq Seq_X$ jest drzewem, to niech $[\mathbb{T}]^*$ będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych z X^ω różniących się od jakiejś gałęzi z $[\mathbb{T}]$ skończoną liczbą wyrazów. Jeśli $f, g \in X^\omega$, to piszemy $f =^* g$ gdy ciągi te różnią się skończoną liczbą wyrazów.

Lemat 39. *Istnieje drzewo $\mathbb{T} \subset Seq_X$ takie, że dowolne dwie gałęzie z korpusu $[\mathbb{T}]$ różnią się nieskończoną ilością wyrazów.*

Dowód. Jeśli zbiór X jest nieskończony, to stosownym drzewem jest dowolne drzewo takie, że jego wierzchołki nie mają wspólnych następników. Gdy zbiór X jest skończony, to postulowane drzewo definiujemy indukcyjnie. Ustalamy wierzchołek $s_0 \in Seq_X$, kładziemy $|s_0| = k_0$ oraz $S_0 = \{s_0\}$ (przyjmujemy, że s_0 będzie pniem definiowanego drzewa). Kolejne liczby naturalne k_n oraz zbiory wierzchołków $S_n \subset Seq_X$ definiujemy indukcyjnie z zachowaniem warunków:

- $k_0 < k_1 < \ldots < k_n$;
- Dowolny wierzchołek $f \in S_{n-1}$ ma dokładnie dwa przedłużenia $g, h \in S_n$;
- Ciągi należące do S_n są przedłużeniami wierzchołków z S_{n-1} (jest ich dokładnie 2^n) oraz wszystkie są długości k_n;
- Dla dowolnych dwóch różnych $f, g \in S_n$ istnieje liczba m taka, że $f(m) \neq g(m)$ oraz $k_{n-1} < m \leqslant k_n$.

Potem kładziemy

$$[\mathbb{T}] = \bigcap\{\bigcup\{[s] : s \in S_n\} : n \in \omega\}.$$

Jeśli $f, g \in [\mathbb{T}]$ oraz $f \neq g$ to, także $f_{|k_n} \neq g_{|k_n}$ dla jakiegoś $n \in \omega$. Wtedy istnieją liczby m_i (dla $i \in \omega$) takie, że $f(m_i) \neq g(m_i)$ oraz $k_{n+i-1} < m_i \leqslant k_{n+i}$. To wystarczy, by teza była spełniona. □

Wniosek 40. *W dowolnym drzewie jest zawarte drzewo, którego dowolne dwie gałęzie różnią się nieskończoną ilością wyrazów.*

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dowód powyższego lematu, w którym skorzystaliśmy jedynie z tego, że Seq_X jest drzewem. □

Twierdzenie 41. *Istnieje malejący ciąg drzew $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \ldots$ zawartych w Seq_X taki, że przekrój*

$$\bigcap\{[\mathbb{F}_n]^* : n \in \omega\}$$

jest przeliczalny.

Dowód. Rozważmy drzewo $\mathbb{T} \subset Seq_X$ takie, że dowolne dwie gałęzie z $[\mathbb{T}]$ różnią się nieskończoną ilością wyrazów, a więc takie jak w poprzednim lemacie. Jeśli $f \in [\mathbb{T}]$, to definiujemy ciąg drzew $\mathbb{F}_n \subset Seq_X$ wzorami $[\mathbb{F}_n] = [f_{|n}] \cap [\mathbb{T}]$. Każde drzewo $\mathbb{F}_n$ jest zawarte w drzewie $\mathbb{T}$ oraz ma korzeń zawierający $f_{|n}$. Ciąg tych drzew jest malejący z względu na inkluzję, a więc także ciąg korpusów $[\mathbb{F}_n]^*$ jest malejący. Zachodzi

$$\bigcap\{[\mathbb{F}_n]^* : n \in \omega\} = \{g \in X^\omega : g =^* f\}.$$

Rzeczywiście, jeśli $g \in [\mathbb{F}_0]^*$ oraz $g \neq^* f$, to istnieje $h \in [\mathbb{F}_0]$ spełniające $f \neq h =^* g$. Ustalmy $m \in \omega$ takie, że $h(m) \neq f(m)$. Gdy $g \in [\mathbb{F}_{m+1}]^*$, to znajdziemy $q \in [\mathbb{F}_{m+1}]$ spełniające $q =^* g$. W rezutacie dostajemy sprzeczność, bo $h, q \in \mathbb{T}$ oraz $h(m) \neq q(m) = f(m)$, czyli $h \neq^* q$: sprzeczność z $q =^* g =^* h$. □

Przekrój, o którym mowa w powyższym lemacie nie zawiera korpusu żadnego drzewa. Innymi słowy, dla drzew niekoniecznie zachodzi odpowiednik twierdzenia J. Hadamarda o nie istnieniu (ω, ω) luk.

10. Systemy drzew

Przekrój malejącego ciągu drzew może być skończony, czyli inkluzja między drzewami dopuszcza nieograniczone malejące ciągi drzew. Zaś brak odpowiedników twierdzeń J. Hadamarda o nie istnieniu (ω, ω) luk lub P. du Bois-Reymonda o nie istnieniu $(\omega, 1)$ granic skutkuje nieograniczonością relacji inkluzji w zakresie korpusów $[T]^*$, gdy $[T]$ to warunki niektórych ustalonych forcingów. Jednym ze sposobów na uniknięcie braku ograniczoności jest tzw. system drzew.

Pierwowzór systemu drzew (według naszych obserwacji) pojawia się po raz pierwszy jako narzędzie badania tzw. "*Laver tree forcing*" w dowodzie "**Theorem 3.1**" zamieszczonego w artykule H. Judah, A. W. Miller oraz S. Shelah [26]. Tuż po wypowiedzi tezy tego twierdzenia napisano tam:

Given $A = \langle A_s \in [\omega]^\omega : s \in \omega^{<\omega}\rangle$ and $s \in \omega^{<\omega}$ define $p_s(A) = p \in \mathbb{L}$ to be the unique Laver tree such that the root of p is s and for every $t \supseteq s$ with $t \in p$ we have that $split(p,t) = A_t$.

Mówimy, że zbiór $\mathcal{G} \subseteq Seq_X$ jest *gęsty*, gdy dla dowolnego wierzchołka $s \in Seq_X$ istnieją $t \in \mathcal{G}$ oraz $n \in \omega$ takie, że $s = t_{|n}$. Dla przykładu, gdy $A \in [\omega]^\omega$, to zbiór $\{t \in Seq_X : |t| \in A\}$ jest gęsty. Rozważmy ciąg

$$\{A_t : t \in Seq_X\} = \overline{\mathbb{A}},$$

którego wyrazy to niepuste podzbiory X. Jeśli zbiór

$$\{t \in Seq_X : 1 < |A_t|\}$$

jest gęsty, to rodzinę $\overline{\mathbb{A}}$ będziemy nazywali *bazą systemu drzew.*

Gdy ustalimy bazę systemu drzew $\overline{\mathbb{A}}$, to dowolnemu wierzchołkowi $s \in Seq_X$ przyporządkowujemy drzewo $\mathbb{P}_s(\overline{\mathbb{A}})$ o pniu zawierającym s oraz takie, że jesli $s \subseteq t \in \mathbb{P}_s(\overline{\mathbb{A}})$ oraz $|s| \leqslant n \in \omega$, to wszystkie bezpośrednie następniki wierzchołka $t_{|n}$ mają ostatnie wyrazy z $A_{t_{|n}}$: innymi słowy, jeśli $s \subseteq t \in \mathbb{P}_s(\overline{\mathbb{A}})$, to $t(n) \in A_{t_{|n}}$ (o ile $|s| \leqslant n$).

Wniosek 42. *Jeśli zbiór $\{t \in Seq_X : A_t \neq X\}$ jest gęsty, to dowolne drzewo postaci $\mathbb{P}_s(\overline{\mathbb{A}})$ ma korpus nigdziegęsty.*

Dowód. Wniosek natychmiast wynika z lematu 37. □

Połóżmy

$$\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}}) = \bigcup\{[\mathbb{P}_s(\overline{\mathbb{A}})] : s \in Seq_X\}.$$

Zbiór $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}})$ będziemy nazywali *korpusem* bazy systemu drzew $\overline{\mathbb{A}}$.

Wniosek 43. *Jeśli zbiór $\{s \in Seq_X : A_s \neq X\}$ jest gęsty, to korpus systemu drzew $\overline{\mathbb{A}}$ (tj. zbiór $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}}) \subseteq X^\omega$) jest zbiorem I kategorii typu F_σ.*

Dowód. Wniosek wynika z lematu 37, bądź wniosku 42. □

Przykład 44. *Jeśli $\overline{\mathbb{A}} = \{A_s : s \in Seq\}$ jest bazą systemu drzew taką, że zbiory A_s są parami rozłączne, to nie istnieje drzewo $T \subseteq Seq$ spełniające $[T]^* \subseteq \mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}})$.*

Dowód. Jeśli $f, g \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}})$ oraz $f \neq g$, to $f(n) \neq g(n)$ dla prawie wszystkich $n \in \omega$. Dla dowolnego drzewa $T \subseteq Seq$ w korpusie $[T]^*$ zawsze są ciągi różniące się jedynie skończoną liczbą wyrazów. □

Twierdzenie 45. *Jeśli $T \subseteq Seq_X$ jest drzewem, to istnieje baza systemu drzew $\overline{\mathbb{A}} = \{A_s : s \in Seq_X\}$ taka, że $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}}) \subseteq [T]^*$.*

Dowód. Ustalmy numerację wierzchołków w Seq_X. Zbiory A_s określamy indukcyjne względem tej numeracji. Jeśli $s \in T$, to

$$A_s = \{t \in X : s^\frown t \in T\}.$$

Załóżmy, że zbiory A_s są zdefiniowane dla wierzchołków s należących do drzew $T = T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{i-1}$. Niech $t \in Seq_X$ będzie wierzchołkiem z najmniejszym numerem, w ustalonej wyżej numeracji wierzchołków z Seq_X, dla którego zbiór A_t nie został jeszcze określony. Ustalamy $n \in \omega$ takie, że $A_{t|_n}$ nie jest określone oraz $A_{t|_{n-1}}$ jest określone. Kładziemy $A_{t|_k} = \{t(k)\}$, dla $n \leqslant k < |t|$. Niech T_i będzie drzewem powstałym z T poprzez zamianę na t początkowych fragmentów wierzchołków z T, o ile fragmenty te są długości |t|. Jeśli $t \subset s \in T_i$, to $s \notin T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{i-1}$ kładziemy

$$A_s = \{q \in X : s^\frown q \in T_i\}.$$

Niniejszym, indukcyjnie zdefiniowaliśmy bazę systemu drzew, którą oznaczamy $\overline{\mathbb{A}}$. Definicja bazy $\overline{\mathbb{A}}$ jest poprawna, bo na i-tym kroku określamy zbiory A_s dla wierzchołków s, które nie należą do drzew T_0, T_1, $T_2, \ldots, T_{i-1}$ oraz dla dowolnego $s \in Seq_X$ zbiór A_s został określony.

Gdy $f \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}})$, to istnieje $s \in Seq_X$ takie, że $f \in P_s(\overline{\mathbb{A}})$. Niech t będzie wierzchołkiem który wykorzystywaliśmy przy definiowaniu drzewa T_i, gdzie i jest indeksem takim, że

$$s \in T_i \setminus T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{i-1}.$$

Wtedy $t \subseteq f$. Rzeczywiście, gdy $t \subseteq s$, to $s|_{|t|} = t$. Zaś gdy $s \subset t$, to $A_{t|_k} = \{t(k)\}$, dla $|s| \leqslant k < |t|$. Także, istnieje $g \in [T]$ takie, że $g(n) = f(n)$ dla wszelkich $n \geqslant |t|$. Stąd dostajemy $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}}) \subseteq [T]^*$. □

Kolejne twierdzenie ma dowód analogiczny, ale wymaga on użycia indukcji pozaskończonej (po przeliczalnych liczbach porządkowych).

Twierdzenie 46. *Jeśli $T \subseteq Seq_X$ jest drzewem, to istnieje baza systemu drzew $\overline{\mathbb{A}} = \{A_s : s \in Seq_X\}$ taka, że $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}}) = [T]^*$.*

Dowód. Jeśli $s \in T$, to $A_s = \{t \in X : s^\frown t \in T\}$. Załóżmy, że zbiory A_s są zdefiniowane dla wierzchołków s należących do drzew $T = T_0$, T_1, $T_2, \ldots, T_\alpha$. Niech $t \in Seq_X$ będzie wierzchołkiem dla którego zbiór A_t nie został jeszcze określony, lecz zbiór $A_{t|_{|t|-1}}$ jest określony bądź $|t| = 1$. Niech T_α będzie drzewem powstałym z T poprzez zamianę na

t początkowych fragmentów wierzchołków z T, o ile te fragmenty są długości $|t|$. Jeśli $t \subset s \in T_\alpha$, to kładziemy

$$A_s = \{q \in X : s^\frown q \in T_i\}.$$

Tak prowadzona indukcja musi się skończyć po przeliczalnych ilościach kroków. Definiuje ona bazę systemu drzew, którą oznaczamy $\overline{\mathbb{A}}$. Analogicznie jak w poprzednim dowodzie sprawdzamy, że $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}}) \subseteq [T]^*$.

Gdy $f \in [T]^*$, to znajdujemy $g \in [T]$ oraz $n \in \omega$ takie, że $f(k) = g(k)$ dla $k \geqslant n$. Jeśli $s = f|_n$, to $f \in P_s(\overline{\mathbb{A}})$. Rzeczywiście, niech t będzie wierzchołkiem który wykorzystywaliśmy przy definiowaniu drzewa T_α, gdzie α jest najmniejszą liczbą porządkową taką, że $s \in T_\alpha$. Tak więc $t \subseteq s$, a więc $g(k) \in A_{f|_k}$ dla $k \geqslant |s|$. Stąd mamy $f \in P_s(\overline{\mathbb{A}})$, czyli $[T]^* \subseteq \mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}})$. □

11. MB-REPREZENTACJA

Niech $\mathcal{Q}$ będzie rodziną zbiorów. Rozważmy ciało podzbiorów $\bigcup \mathcal{Q}$ określone następująco:

Zbiór $Y \subseteq \cup\mathcal{Q}$ należy do $(\mathcal{Q})$ gdy dla dowolnego $P \in \mathcal{Q}$ istnieje $T \in \mathcal{Q}$ takie, że $T \subseteq P \cap Y$ lub $T \subseteq P \setminus Y$.

Ciało to będziemy oznaczali $(\mathcal{Q})$.

Oznaczmy przez (q^0) ideał złożony wyłącznie ze zbiorów takich, że dla dowolnego $P \in \mathcal{Q}$ istnieje $T \in \mathcal{Q}$ takie, że $T \subseteq P$ oraz $T \cap Y = \emptyset$.

Rodzina $\mathcal{Q}$ bywa nazywana *MB-reprezentacją* dla ciała $(\mathcal{Q})$ lub ideału (q^0). Akronim to skrót nazwisk matematyków E. Marczewskiego oraz C. Burstina, szczegóły teorii MB-reprezentacji są omówione w [4], a także w innych pracach autorów tego artykułu.

Zmodyfikujemy nieznacznie definicję MB-reprezentacji. Załóżmy, że $\mathcal{Q}$ jest rodziną drzew lub systemów drzew taką, że

$$X^\omega = \bigcup\{[T] : T \in \mathcal{Q}\}.$$

Niech $\leqslant$ będzie częściowym porządkiem określonym na $\mathcal{Q}$. Dla przykładu, $\leqslant$ może być wzmocnieniem inkluzji między korpusami, o którym była mowa wcześniej. Jeśli $Y \subseteq X^\omega$, to $Y \in (q^0)$ gdy dla dowolnego $P \in \mathcal{Q}$ istnieje $T \leqslant P$ takie, że $[T] \cap Y = \emptyset$. Tak samo jak dla MB-reprezentacji sprawdzamy, że rodzina (q^0) jest ideałem. Analogicznie, rodzinę $\mathcal{Q}$ będziemy nazywali *MB-reprezentacją* ideału (q^0).

Jeśli $V \in [\omega]^\omega$, to możemy zdefiniować bazę systemu

$$\overline{V} = \{V_s : s \in Seq_2\}$$

następująco:

$$V_s = \begin{cases} \{0\}, & \text{gdy } |s| \notin V; \\ \{0,1\}, & \text{gdy } |s| \in V. \end{cases}$$

Gdy utożsamimy dowolny podzbiór zbioru ω z jego funkcją charakterystyczną, to korpus $P(\overline{V})$ utożsamimy z rodziną wszystkich podzbiorów prawie zawartych w V. Wtedy ideał (q^0) utożsamimy także z ideałem (r^0) podzbiorów nigdziegęstych w topologii Ellentucka $[\omega]^\omega$: innymi słowy, zbiorów nigdzie Ramsey'a; patrz [48].

Jeśli $W = \langle A, B \rangle$, to możemy zdefiniować bazę systemu

$$\overline{W} = \{W_s : s \in Seq_2\}$$

następująco:

$$W_s = \begin{cases} \{0\}, & \text{gdy } |s| \notin B; \\ \{1\}, & \text{gdy } |s| \in A; \\ \{0,1\}, & \text{gdy } |s| \in B \setminus A. \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio korpus $P(\overline{W})$ utożsamiamy z $\langle A, B \rangle^*$, a więc wszystkie takie korpusy to MB-reprezentacja ideału (v^0). Wynika z twierdzenia 62.

Powyżej opisane MB-reprezentacje dla ideałów (r^0) oraz (v^0) relatywnie względem inkluzji dają σ-ograniczone częściowe porządki. To pozwala opisywać własności tych ideałów, patrz [48] oraz [27], korzystając z technik konstruowania drzew bazowych. Przypuszczamy, że analogiczne możliwości powstaną dla ideałów (l^0), (m^0) lub (s^0), o ile drzewa Lavera, Millera bądź Sacksa będziemy umieli zastąpić stosownymi systemami drzew. Taką próbę podejmujemy w kolejnym rozdziale.

Rozważmy bazę $\overline{A} = \langle A_s : s \in Seq \rangle$, gdzie wszystkie zbiory $A_s \subseteq \omega$ są nieskończone. Wtedy dla dowolnego $s \in Seq$ zbiór wierzchołków $p_s(\overline{A})$ to drzewo Lavera, czyli drzewo zawarte w Seq takie, że dowolny wierzchołek zawierający pień ma nieskończenie wiele bezpośrednich następników, patrz [25, str. 554]. Jeśli dodatkowo zbiory A_s są parami rozłączne, to rodzinę $\overline{A}$ będziemy nazywać *systemem drzew Lavera.* To założenie nie zmiejszy ogólności naszych rozważań, co wynika z następującego lematu oraz wniosku:

Lemat 47. *Dla dowolnego ciągu $\{U_n\}$ nieskończonych podzbiorów ω istnieje ciąg $\{V_n\}$ zbiorów nieskończonych parami rozłącznych taki, że $V_k \subseteq U_k$ dla wszelkich $k \in \omega$.*

Dowód. Lemat wynika z ogólnych własności rodzin ADR, por. [3, str. 357]. Można go także poprowadzić tak:

Przenumerujmy wyrazy ciągu $\{U_n\}$ w ciąg $\{W_n\}$ tak, aby każdy wyraz U_n występował w ciągu $\{W_n\}$ nieskończenie wiele razy. Niech $x_0 \in W_0$ oraz $x_n \in W_n \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Następnie kładziemy

$$V_k = \{x_m : W_m = U_k\},$$

gdzie równość $W_m = U_k$ rozumiemy jako równość wyrazów ciągów. □

Wniosek 48. *Jeśli $\overline{A} = \langle A_s : s \in Seq \rangle$ jest systemem nieskończonych podzbiorów ω, to istnieje system drzew Lavera $\overline{B} = \langle B_s : s \in Seq \rangle$ taki, że $B_s \subseteq A_s$ dla wszelkich $s \in Seq$: innymi słowy, zbiory B_s są parami rozłączne oraz $\mathbb{P}(\overline{B}) \subseteq \mathbb{P}(\overline{A})$.* □

Niech $(\mathbb{L}, \subseteq)$ będzie rodziną wszystkich drzew Lavera zawartych w ω^ω uporządkowanych relacją inkluzji (drzewo Lavera utożsamiamy z jego korpusem). Wtedy (l^0) oznacza ideał dla którego $(\mathbb{L}, \subseteq)$ jest MB-reprezentacją, porównaj [16], [8] lub [58].

W artykule [16] napisano: *By a fusion argument one easily shows that* (l^0) ...; W tym komentarzu chodziło o to, aby uniknąć spisywania dowodu tego, że (l^0) to σ-ideał. W pracy [8] to, że (l^0) jest σ-ideałem zostało przyjęte jako fakt oczywisty (należący do tzw. folkloru matematycznego). Zamieszczony poniżej dowód nie korzysta bezpośrednio z fuzji, tj. z "fusion argument".

Za artykułem [16], określamy częściowe uporządkowanie między systemami drzew (Lavera). Mianowicie, piszemy $\overline{B} \ll^* \overline{A}$, gdy $B_s \subseteq A_s$ za wyjątkiem skończenie wielu $s \in Seq$. Ten częściowy porządek nie jest separatywny. Rzeczywiście, skoro każde $i(\overline{A})$ zawiera wszystkie $\overline{B}$ takie, że zbiory A_s oraz B_s różnią się tylko podzbiorami skończonymi, to dowolne $\overline{B} \in i(\overline{A})$ takie, że $B_s \setminus A_s \neq \emptyset$, dla nieskończenie wielu $s \in Seq$, jest świadkiem braku separatywności.

Jeśli $s\mathbb{L}$ oznacza rodzinę wszystkich systemów drzew Lavera, to relacja $\ll^*$ obcięta do $s\mathbb{L}$ daje zbiór częściowo uporządkowany $(s\mathbb{L}, \ll^*)$. Niech

$$k\mathbb{L} = \{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}}) : \overline{\mathbb{A}} \in s\mathbb{L}\}$$

oraz niech $\ll$ będzie relacją częściowego porządku określoną następująco $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{B}}) \ll \mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}})$, o ile $\overline{\mathbb{B}} \ll^* \overline{\mathbb{A}}$.

Lemat 49. *Ideał (l^0) jest zawarty w ideale, dla którego zbiór częściowo uporządkowany $(k\mathbb{L}, \ll)$ jest MB-reprezentacją.*

Dowód. Ustalmy zbiór $Y \in (l^0)$ oraz system drzew Lavera $\overline{\mathbb{A}} = \{A_s : s \in Seq\}$. Indukcyjnie (względem przeliczalnych liczb porządkowych) zdefiniujemy system drzew Lavera $\overline{\mathbb{B}} = \{B_s : s \in Seq\}$ taki, że $B_s \subseteq A_s$, dla wszelkich $s \in Seq$, oraz

$$\mathbb{P}(\overline{\mathbb{B}}) \cap Y = \emptyset.$$

Niech $T(\emptyset) \subseteq P_\emptyset(\overline{\mathbb{A}})$ będzie drzewem Lavera takim, że $[T(\emptyset)] \cap Y = \emptyset$. Jeśli $t \in T(\emptyset)$ oraz t ma nieskończenie wiele bezpośrednich następników w drzewie $T(\emptyset)$, to kładziemy $B_t = \{n \in \omega : t^\frown n \in T(\emptyset)\}$. Niech $\overline{\mathbb{B}^0}$ będzie bazą systemu drzew złożoną z wszystkich dotychczas określonych nieskończonych zbiorów B_t jako zbiorów bezpośrednich następników wierzchołka t oraz pustych zbiorów bezpośrednich następników dla pozostałych wierzchołków. Bezpośrednio z definicji sprawdzamy, że $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{B}^0}) \cap Y = [T(\emptyset)] \cap Y = \emptyset$, a także $B_s \subseteq A_s$, dla wszelkich $s \in Seq$.

Załóżmy, że bazy systemów drzew $\overline{\mathbb{B}^\beta}$, dla $\beta < \alpha$, zostały określone tak, że:

- $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{B}^\beta}) \cap Y = \emptyset$;
- Jeśli $\gamma < \beta$ oraz $B_t^\gamma \neq B_t^\beta$, to $B_t^\gamma = \emptyset$;

- Jeśli $B_t^\beta \neq \emptyset$, to $B_t = B_t^\beta \subseteq A_t$ jest zbiorem nieskończonym.

Przypuśćmy, że istnieje wierzchołek $t \in Seq$ taki, że dla nieskończenie wielu $n \in \omega$ zbiór $B_{t^\frown n}$ został w dotychczasowych krokach indukcyjnych określony jako zbiór nieskończony, lecz w tych bazach zbiór bezpośrednich następników wierzchołka t jest pusty. Wtedy kładziemy

$$B_t = \{n \in \omega : \exists(\beta < \alpha) \quad \emptyset \neq B_{t^\frown n} \in \overline{\mathbb{B}^\beta} \quad \} \subseteq A_t,$$

zaś $\overline{\mathbb{B}^\alpha}$ niech składa się ze wszelkich nieskończonych B_s dotychczas określonych oraz zbiorów pustych indeksowanych pozostałymi wierzchołkami. Z definicji korpus $[P_t(\overline{\mathbb{B}^\alpha})]$ jest sumą korpusów drzew $[P_{t^\frown n}(\overline{\mathbb{B}^\beta})]$, gdzie nieskończone zbiory $B_{t^\frown n}$ zostały określone na kroku β, a więc jest rozłączny z Y. Stąd wnioskujemy, że baza $\overline{\mathbb{B}^\alpha}$ spełnia założenia indukcyjne.

Gdy pozostały jedynie wierzchołki $t \in Seq$ takie, że dotychczas nie określono nieskończonego zbioru B_t, ustalamy drzewo Lavera T_s takie, że

- $[T_s] \subseteq [P_s(\overline{\mathbb{A}})]$;
- Jeśli $s \subseteq t \in T_s$, to B_t jako zbiór nieskończony dotychczas nie został określony;
- $[T_s] \cap Y = \emptyset$.

Następnie kładziemy

$$B_t = \{n \in \omega : s \subseteq t \text{ oraz } t^\frown n \in T_s\} \subseteq A_t,$$

zaś $\overline{\mathbb{B}^\alpha}$ niech składa się ze wszelkich nieskończonych B_s dotychczas określonych oraz zbiorów pustych indeksowanych pozostałymi wierzchołkami. Z definicji dowolny korpus $[P_t(\overline{\mathbb{B}^\alpha})]$ jest rozłączny z Y, a więc baza $\overline{\mathbb{B}^\alpha}$ spełnia założenia indukcyjne.

Na każdym kroku dodajemy jakieś nieskończone B_t, a więc możliwość kontynuowania indukcji zanika po przeliczalnej ilości kroków. Po zaniku możliwość kontynuowania indukcji wszystkie B_t muszą być nieskończone, a więc idukcyjnie zostanie określony system drzew Lavera $\overline{\mathbb{B}} = \{B_s \subseteq A_s : s \in Seq\}$ taki, że $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{B}}) \cap Y = \emptyset$ oraz $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{B}}) \ll \mathbb{P}(\overline{\mathbb{A}})$. To wystarcza dla zakończenia dowodu. $\square$

Wniosek 50. *Zbiór częściowo uporządkowany* $(k\mathbb{L}, \ll))$ *jest MB-reprezentacją dla ideału* (l^0).

Dowód. Oznaczmy (sl^0) ideał którego MB-reprezentacją jest $(k\mathbb{L}, \ll$ $))$. Wobec lematu 49 pozostało pokazać, iż $(sl^0) \subseteq (l^0)$. Rozważmy zbiór $Y \in (sl^0)$ oraz drzewo Lavera T o pniu s. Niech $\mathbb{A}$ będzie bazą systemu drzew Lavera taką, że $[P_s(\mathbb{A})] = [T]$. Jeśli $\mathbb{B} \ll \mathbb{A}$ jest bazą sytemu drzew Lavera taką, że $\mathbb{P}(\mathbb{B}) \cap Y = \emptyset$, to $[P_s(\mathbb{B})] \subseteq [T]$ oraz $[P_s(\mathbb{B})] \cap Y = \emptyset$. Co dowodzi $Y \in (l^0)$. □

13. Uwagi końcowe

Nasze zamierzenia zastosowania technik macierzy bazowych oraz twierdzenia Kulpy-Szymańskiego są zrealizowane fragmentarycznie. Ograniczenia wynikają z braku stosownych lematów kombinatorycznych. Nie jesteśmy nawet pewni tego, czy takowe lematy są możliwe. W języku systemów drzew umiemy opisać ideały (r^0) oraz (v^0), patrz rozdział o MB-reprezentacji. Jednakże już dla ideału (l^0) proponowany częściowy porządek między systemami drzew Lavera okazał się nie być separatywny. Sądzimy, że to samo będzie dotyczyć ideałów (m^0) oraz (s^0), o ile stosowne systemy drzew nie zostaną adekwatnie dobrane. Nadal jednak sądzimy, że techniki macierzy bazowych pozwolą wykazać, że hipoteza continuum implikuje istnienie izomorfizmów między ideałami (r^0), (v^0), (l^0), (m^0) oraz (s^0). Na pewno wiemy, że tak jest dla (r^0) oraz (v^0), bo w pracy przytoczonej w dodatku pokazaliśmy, że wtedy te dwa ideały mają typ idełu $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}, \mathfrak{c})$.

14. Dodatek

W tym dodatku zamieszczamy kopię artykułu Piotra Kalemby, Szymona Plewika oraz Anny Wojciechowskiej [27] w wersji przesłanej do druku. Ta kopia jest nieznacznie zmodyfikowana tak, aby zachować jednolitość rozprawy. Artykuł ten jest cytowany na stronie 221 książki

Lorentz J. Halbeisen
"*Combinatorial Set Theory*
With a Gentle Introduction to Forcing".

Wydanej w 2012 roku serii Springer Monographs in Mathematics.
ISSN 1439- 7382
ISBN 978-1-4471-2173-5
e-ISBN 978-1-4471-2173-2
Library of Congress Control Number 2011942598

14.1. **Abstract.** . The σ-ideal (v^0) is associated with the Silver forcing, see [8]. Also, it constitutes the family of all completely doughnut null sets, see [19]. We introduce segment topologies to state some resemblances of (v^0) to the family of Ramsey null sets. To describe $add(v^0)$ we adopt a proof of Base Matrix Lemma. Consistent results are stated, too. Halbeisen's conjecture $cov(v^0) = add(v^0)$ is confirmed under the hypothesis $t = \min\{\mathrm{cf}(\mathfrak{c}), r\}$. The hypothesis $cov(v^0) = \omega_1$ implies that (v^0) has the ideal type $(\mathfrak{c}, \omega_1, \mathfrak{c})$.

14.2. **Introduction.** Our discussion focuses around the family $[\omega]^\omega$ of all infinite subsets of natural numbers. We are interested in some structures on $[\omega]^\omega$ which correspond to the inclusion $\subseteq$ and to the partial order $\subseteq^*$. Recall that, $A \subseteq^* X$ means that the set $A \setminus X$ is finite. We assume that the readers are familiar with some properties of the partial order $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$. For instance, gaps of type (ω, ω^*) and ω-limits do not exist, see F. Hausdorff [18] or compare F. Rothberger [50]. We refer to books [13] and [31] for the mathematics used in this note. In particular, one can find basic facts about completely Ramsey sets and its applications to the descriptive set theory in [31] p. 129 - 136. Let us add, that E. Ellentuck (1974) was not the first one who considered properties of the topology which is called by his name. Non normality of this topology was established by V. M. Ivanowa (1955) and J. Keesling (1970), compare [13] p. 162 -163. We refer the readers to papers [3], [8], [23], [37], [38] and [44] for other applications of completely Ramsey sets, not discussed in [31].

Let $\mathcal{W}$ be a family of sets such that $\cup\mathcal{W} \notin \mathcal{W}$. Recall that,

$$add(\mathcal{W}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{W} \text{ and } \cup \mathcal{F} \notin \mathcal{W}\}$$

is called the *additivity number* of $\mathcal{W}$. But

$$cov(\mathcal{W}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{W} \text{ and } \cup \mathcal{F} = \cup\mathcal{W}\}$$

is called the *covering number* of $\mathcal{W}$. Thus, $add(v^0)$ and $add(v)$ denote the additivity number of the ideal (v^0) and of the σ-field (v), respectively. But $cov(v^0)$ denotes the covering the ideal (v^0). For definitions of the tower number t and the reaping number r we refer to [?]. One can find there a thorough discussion of consistent properties of t and r, too.

J. Brendle [8] considered a few tree-like forcings with σ-ideals associated to them. The concept of these ideals is modeled on s^0-sets of Marczewski [59] and Morgan's category base [42]. One of these ideals is the ideal (v^0). It is associated with the Silver forcing. The ideal (v^0) is examined in papers [9], [19] and [35], too. L. Halbeisen [19] found some analogy with completely Ramsey sets and introduced so called completely doughnut sets, i.e. v-sets in our terminology. He introduced a pseudo topology - and called it the doughnut topology - such that X is a v-set iff X has the Baire property with respect to the doughnut topology. Using the method of B. Aniszczyk [1] and K. Schilling [57] we introduce segments topologies, each one corresponds to v-sets similarly as Halbeisen's pseudo topology. To describe $add(v)$ we adopt a proof of Base Matrix Lemma, compare [2] and [3]. The height $\kappa(v)$ of a base v-matrix equals to $add(v) = add(v^0)$. With a base v-matrix it is associated the increasing family of v^0-sets with the union outside the ideal (v^0). We can not confirm (in ZFC) that this union is $[\omega]^\omega$. Therefore, we get a few consistent results. For example, $cov(v^0) = \omega_1$ implies that (v^0) has the ideal type $(\mathfrak{c}, \omega_1, \mathfrak{c})$. The conjecture of Halbeisen $cov(v^0) = add(v^0)$ is confirmed under $t = \min\{\mathrm{cf}(\mathfrak{c}), r\}$.

On the other hand, each maximal chain contained in a base v-matrix gives a $(\kappa(v), \kappa(v)^*)$-gap or a $\kappa(v)$-limit. If $cov(v^0) = add(v^0)$, then one can improve any base v-matrix such that each maximal chain, contained in a new one, gives a $(\kappa(v), \kappa(v)^*)$-gap, only. But, whenever $cov(v^0) \neq add(v^0)$, then there exist $\kappa(v)$-limits. Thus our's research continue Hausdorff [18] and Rothberger [50], too.

14.3. **Segments and $*$-segments.** In this section we consider segments and $*$-segments. The facts quoted here immediately arise from well known ones. A set

$$\langle A, B\rangle = \{X \in [\omega]^\omega : A \subseteq X \subseteq B\}$$

is called a *segment*, whenever $A \subseteq B \subseteq \omega$ and $B \setminus A \in [\omega]^\omega$. By the definition any segment has the cardinality continuum. If $\langle A, B\rangle$ and $\langle C, D\rangle$ are segments, then the intersection

$$\langle A, B\rangle \cap \langle C, D\rangle = \langle A \cup C, B \cap D\rangle$$

is finite or is a segment. It is a segment, whenever $A \cup C \subset B \cap D$ and $B \cap D \setminus A \cup C \in [\omega]^\omega$. Thus, the family of all segments is not closed under finite intersections.

Fakt 51. *Any segment contains continuum many disjoint segments.*

Dowód. Let $\langle A, B\rangle$ be a segment. Consider a family $\mathcal{R}$ of almost disjoint subsets of $B \setminus A$ of the cardinality continuum. Divide each set

$C \in \mathcal{R}$ into two infinite subsets D_C and $C \setminus D_C$. The family

$$\{\langle A \cup D_C, A \cup C\rangle : C \in \mathcal{R}\}$$

is a desired one. □

For any set $S \subseteq [\omega]^\omega$ we put

$$S^* = \{Y : X \subseteq^* Y \subseteq^* X \text{ and } X \in S\}.$$

Thus, S^* is a countable union of copies of S, i.e. the union of sets $\{(X \setminus y) \cup (y \setminus X) : X \in S\}$, where $y \subset \omega$ runs over finite subsets. If $\langle A, B\rangle$ is a segment, then the set

$$\{X : A \subseteq^* X \subseteq^* B\} = \langle A, B\rangle^*$$

is called *$*$-segment.*

Fakt 52. *If $\{\langle A_n, B_n\rangle : n \in \omega\}$ is a sequence of segments decreasing with respect to the inclusion, then there exists a segment $\langle C, D\rangle$ such that $\langle C, D\rangle \subseteq \langle A_n, B_n\rangle^*$ for each $n \in \omega$.*

Dowód. Let $\{\langle A_n, B_n\rangle : n \in \omega\}$ be a decreasing sequence of segments. We have

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq B_2 \subseteq B_1 \subseteq B_0.$$

Choose a set $C \in [\omega]^\omega$ such that $A_n \subseteq^* C \subseteq^* B_n$ for each $n \in \omega$. Additionally, we can assume that sets $C \setminus A_n$ and $B_n \setminus C$ are infinite, since there are no ω-limits and (ω, ω^*)-gaps. Then, choose a set $D \in [\omega]^\omega$ such that $D \setminus C$ is infinite and $C \subseteq D \subseteq^* B_n$ for each $n \in \omega$. □

Occasionally segments show up in the descriptive set theory. For example, the work of G. Moran and D. Strauss [41] implies that any subset of $[\omega]^\omega$ having the property of Baire and of second category contains a segment. In other words, it has the doughnut property. One can prove this adopting the proof of Proposition 2.2 in [11], also. The work [41] implies that any subsets of $[\omega]^\omega$ with positive Lebesgue measure contains a segment, compare [47] and [35].

14.4. **Segment topologies.** C. Di Prisco and J. Henle [11] introduced so called doughnut property. Namely, a subset $S \subseteq [\omega]^\omega$ has the doughnut property, whenever S contains a segment or is disjoint with a segment. Afterwards, Halbeisen [19] generalized this property, considering so called completely doughnut sets and completely doughnut null sets. We feel that the use of "doughnut" is not appropriate. We swap it onto notations similar to that, which were used in [8] or [35]. A subset $S \subseteq [\omega]^\omega$ is called a *v-set*, if for each segment $\langle A, B\rangle$ there exists a segment $\langle C, D\rangle \subseteq \langle A, B\rangle$ such that

$$\langle C, D\rangle \subseteq S \text{ or } \langle C, D\rangle \cap S = \emptyset.$$

If always holds $\langle C, D\rangle \cap S = \emptyset$, then S is called a v^0*-set*. Any subset of a v^0-set is a v-set and a v^0-set, too. Also, the complement of a v-set is a v-set. According to facts 1.3, 1.5 and 1.6 in Halbeisen [19], the family of all v-sets is a σ-field and we denote this field (v). The family of all v^0-sets is a σ-ideal and we denote this ideal (v^0). One can find many interesting results about (v^0) in papers [8], [9] and [35].

We amplify the method of Aniszczyk [1] and Schilling [57] to introduce some topologies, which correspond to (v). These topologies have the same features as the pseudo topology, which was considered by Halbeisen [19]. Fix a transfinite sequence $\{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ consisting of all segments. Put $V_0 = C_0$. For every ordinal number $\alpha < \mathfrak{c}$, let M_α be the union of all intersections $C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2} \cap \ldots \cap C_{\beta_n}$ such that

$$|C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2} \cap \ldots \cap C_{\beta_n}| < \omega,$$

where $\beta_i \leqslant \alpha$ and $1 \leqslant i \leqslant n$. Put $V_\alpha = C_\alpha \setminus M_\alpha$. The topology generated by all (just defined) sets V_α is called a *segment topology.* There are many segment topologies, since any one depends on an ordering $\{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. We get $|M_\alpha| < \mathfrak{c}$, for any $\alpha < \mathfrak{c}$. Also, each V_α contains a segment. Therefore, if $S \subset [\omega]^\omega$ and $|S| < \mathfrak{c}$, then S is nowhere dense with respect to any segment topology. Moreover, we have.

Lemat 53. *Any family $\{V_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ is a π-base and subbase for the segment topology (which it generates).*

Dowód. The family $\{V_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ is a subbase by the definition. Thus, the family of all intersections $V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} \cap \ldots \cap V_{\beta_n}$ constitutes a base. If a base set $V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} \cap \ldots \cap V_{\beta_n}$ is non-empty, then it has the form of a segment minus a set of the cardinality less than the continuum, exactly

$$C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2} \cap \ldots \cap C_{\beta_n} \setminus (M_{\beta_1} \cup M_{\beta_2} \cup \ldots \cup M_{\beta_n}).$$

By Fact 51, it contains some segment C_α. Hence $V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} \cap \ldots \cap V_{\beta_n}$ contains some $V_\alpha \subseteq C_\alpha$. □

Immediately, one obtains that any two segment topologies determine the same family of nowhere dense sets. As a matter of fact, every element of the base contains a segment and vice versa. Consequently, the nowhere dense sets with respect to any segment topology are the v^0-sets. The next lemma amplifies the fact that there are no (ω, ω^*)-gaps. It corresponds to the result of Moran and Strauss [41], compare Proposition 2.2 in [11]. We need the following abbreviation

$$\langle A, B\rangle_n = \langle A, B \setminus (\{0, 1, \ldots, n\} \setminus A)\rangle .$$

Lemat 54. *Let $S_0, S_1, \ldots$ be a sequence of nowhere dense subsets. For any segment $\langle A, B\rangle$ there exists a segment $\langle E, F\rangle \subseteq \langle A, B\rangle$ such that $S_n \cap \langle E, F\rangle = \emptyset$ for each $n \in \omega$.*

Dowód. Assume that the sequence $S_0, S_1, \ldots$ is increasing. We shall define points $e_0, e_1, \ldots, e_n$ and sets

$$A \subseteq A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq B_n \subseteq \ldots \subseteq B_1 \subseteq B_0 \subseteq B,$$

where $B_n \setminus A_n$ is infinite, $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset B_n \setminus A_n$ and

$$e_n = \min(B_n \setminus (A_n \cup \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\});$$

and such that $\langle A_n \cup x, B_n\rangle_{e_n} \cap S_n = \emptyset$, for each $x \subseteq \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ and any $n < \omega$.

We proceed inductively with respect to n. Let $e_0 = \min(B \setminus A)$. Choose a segment $\langle A_0^0, B_0^0\rangle \subseteq \langle A, B\rangle_{e_0} \setminus S_0$. Then, choose sets $A_0 \supseteq A_0^0$ and $B_0 \subseteq B_0^0 \cup \{e_0\}$ such that $e_0 \in B_0 \setminus A_0$ and the segment $\langle A_0 \cup \{e_0\}, B_0\rangle_{e_0}$ is disjoint with S_0. We get

$$(\langle A_0 \cup \{e_0\}, B_0\rangle_{e_0} \cup \langle A_0, B_0\rangle_{e_0}) \cap S_0 = \emptyset.$$

Assume that sets A_n and B_n are defined. Let

$$e_n = \min(B_n \setminus (A_n \cup \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\})).$$

Enumerate all subsets of $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ into a sequence $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{n+1}}$. Choose a segment

$$\left\langle A_n^1, B_n^1\right\rangle \subseteq \langle A_n \cup x_1, B_n\rangle_{e_n} \setminus S_n.$$

If a segment $\left\langle A_n^{k-1}, B_n^{k-1}\right\rangle$ has been already defined, then choose sets $A_n^k \supseteq A_n^{k-1}$ and $B_n^k \subseteq B_n^{k-1} \cup \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ such that $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset B_n^k \setminus A_n^k$ and the segment $\left\langle A_n^k \cup x_k, B_n^k\right\rangle_{e_n}$ is disjoint with S_n. Let B_{n+1} be the last B_n^k and A_{n+1} be the last A_n^k. By the definition, we get $\{e_k : k < \omega\} \subset B_n \setminus A_n$ and

$$\cup\{\left\langle A_n^k \cup x_k, B_n^k\right\rangle_{e_n} : 0 < k \leqslant 2^{n+1}\} \cap S_n = \emptyset,$$

for any $n < \omega$. Finally, the segment

$$\langle E, F\rangle = \langle \cup\{A_n : n \in \omega\}, \cup\{A_n : n \in \omega\} \cup \{e_n : n \in \omega\}\rangle$$

is disjoint with each S_k. Indeed, suppose $C \in \langle E, F\rangle \cap S_k$. Let $x = C \cap \{e_0, e_1, \ldots, e_k\}$. Then $C \in \langle A_k \cup x, B_k\rangle_{e_k}$. But this contradicts $\langle A_k \cup x, B_k\rangle_{e_k} \cap S_k = \emptyset$. □

Wniosek 55. *For any segment topology, the intersection of countable many open and dense sets contains an open and dense subset.* □

Wniosek 56. *The ideal (v^0) coincides with the family of all sets of the first category with respect to any segment topology.* □

Recall that, a subset Y of a topological space X has the property of Baire whenever $Y = (G \setminus F) \cup H$, where G is open and F, H are of the first category. If $X = [\omega]^\omega$ is equipped with a segment topology, then $Y \subseteq X$ has the Baire property (i.e. the property of Baire with respect to this segment topology) whenever $Y = G \cup H$, where G is open and H is a v^0-set.

Twierdzenie 57. *The σ-field (v) coincides with the family of all sets which have the Baire property with respect to a segment topology.*

Dowód. Fix a segment topology and a v-set X. Let $U = \cup\{V_\beta : V_\beta \subseteq X\}$ and $W = \cup\{V_\beta : V_\beta \cap X = \emptyset\}$. The union $U \cup W$ is open and dense. Thus $X = U \cup F$, where $F \subseteq [\omega]^\omega \setminus (U \cup W)$ is nowhere dense.

We shall show that any open set is a v-set. Suppose a set X is open. Take an arbitrary segment $\langle A, B\rangle$ and choose a subbase set $V_\alpha \subseteq \langle A, B\rangle$. There exists $V_\beta \subseteq V_\alpha$ such that $V_\beta \subseteq X$ or $V_\beta \subseteq \mathrm{Int}([\omega]^\omega \setminus X)$. Each segment $\langle C, D\rangle \subseteq V_\beta$ witnesses that X is a v-set. □

Every classical analytic set belongs to (v). This is a counterpart of Mathias-Silver theorem - compare (21.9) or (29.8) in [31] - which arises from Halbeisen's paper [19]. In fact, one could conclude it similarly like in the paper by Pawlikowski [45]. This was noted by Brendle, Halbeisen and Löwe in [9]. We obtain the counterpart directly, using Theorem 56 and theorems (29.11), (29.13) in [31].

14.5. **Base v-matrix.** We shall adopt a proof of Base Matrix Lemma - see B. Balcar J. Pelant and P. Simon, compare [2] and [3]. There are known some generalizations of this theorem for some partial orders, e.g. compare [40]. For completeness, we prove our's version directly. If $\langle A, B\rangle$ and $\langle C, D\rangle$ are segments, then the intersection $\langle A, B\rangle^* \cap \langle C, D\rangle^*$ is countable or has the cardinality continuum. In the second case the intersection is a $*$-*segment.*

Whenever $\langle A, B\rangle^* \cap \langle C, D\rangle^*$ is countable, then $\langle A, B\rangle^*$ and $\langle C, D\rangle^*$ are called $*$-*disjoint.*

Lemat 58. *If S is a v^0-set, then for any segment $\langle A, B\rangle$ there exists a segment $\langle C, D\rangle \subseteq \langle A, B\rangle$ such that $\langle C, D\rangle^* \cap S^* = \emptyset$.*

Dowód. By the definition, S^* is a countable union of elements of (v^0), hence $S^* \in (v^0)$. Thus, any segment $\langle C, D\rangle \subseteq \langle A, B\rangle$ disjoint with S^* is a desired one. □

A family $\mathcal{P}$ of $*$-segments is a *v-partition*, whenever any two distinct members of $\mathcal{P}$ are $*$-disjoint and $\mathcal{P}$ is maximal with respect to the inclusion. A collection of v-partitions is called *v-matrix.* A v-partition $\mathcal{P}$ *refines* a v-partition $\mathcal{Q}$ (briefly $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$), if for each $\langle A, B\rangle^* \in \mathcal{P}$ there exists $\langle C, D\rangle^* \in \mathcal{Q}$ such that $\langle A, B\rangle^* \subseteq \langle C, D\rangle^*$. A v-matrix $\mathcal{H}$ is called *shattering*, if for each $*$-segment $\langle A, B\rangle^*$ there exists $\mathcal{P} \in \mathcal{H}$ and $\langle A_1, B_1\rangle^*, \langle A_2, B_2\rangle^* \in \mathcal{P}$ such that $\langle A_1, B_1\rangle^* \cap \langle A, B\rangle^*$ and $\langle A_2, B_2\rangle^* \cap \langle A, B\rangle^*$ are different $*$-segments. Denote by $\kappa(v)$ the least cardinality of a shattering v-matrix.

Lemat 59. *If a v-matrix $\mathcal{H}$ is of the cardinality less than $\kappa(v)$, then there exists a v-partition $\mathcal{P}$ which refines any v-partition $\mathcal{Q} \in \mathcal{H}$.*

Dowód. Fix a segment $\langle A, B\rangle$. Let $\mathcal{H}(A, B) = \{\mathcal{P}(A, B) : \mathcal{P} \in \mathcal{H}\}$ be the relative v-matrix such that each $\mathcal{P}(A, B)$ consists of all $*$-segments $\langle C, D\rangle^* \cap \langle A, B\rangle^*$, where $\langle C, D\rangle^* \in \mathcal{P}$. Any segment $\langle C, D\rangle$ is isomorphic to $[D \setminus C]^{\leqslant\omega}$ and $[\omega]^{\leqslant\omega}$, hence $\mathcal{H}(A, B)$ is not shattering relative to $\langle A, B\rangle^*$. Choose a segment $\langle C, D\rangle \subseteq \langle A, B\rangle$ such that there exists $\langle E, F\rangle^* \in \mathcal{P}$ with $\langle C, D\rangle^* \subseteq \langle E, F\rangle^*$ for every $\mathcal{P} \in \mathcal{H}$. Any v-partition $\mathcal{P}$ consisting of above defined $*$-segments $\langle C, D\rangle^*$ is a desired one. □

Let h be the height of the base matrix . See [2] and [3] for rudimentary properties of the cardinal number h.

Twierdzenie 60. $\omega_1 \leqslant \kappa(v) \leqslant h$ *and* $\kappa(v)$ *is a regular cardinal number.*

Dowód. Suppose $h < \kappa(v)$. Take a base matrix $\{\mathcal{H}_\alpha : \alpha < h\}$ such as in 2.11 Base Matrix Lemma in [2]. Let $\mathcal{P}_\alpha$ be a v-partition such that for any $\langle A, B\rangle^* \in \mathcal{P}_\alpha$ there exists $V \in \mathcal{H}_\alpha$ with $B \setminus A \subseteq^* V$. The v-matrix $\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < h\}$ contradicts Lemma 59.

Consider a shattering v-matrix $\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$. By Lemma 59, we can assume that $\alpha < \beta$ implies $\mathcal{P}_\beta \prec \mathcal{P}_\alpha$. Any cofinal family of v-partitions from $\mathcal{H}$ constitutes a shattering v-matrix. Hence $\kappa(v)$ has to be regular. It is uncountable by Fact 52. $\square$

Twierdzenie 61. *There exists a v-matrix $\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ which is well ordered by the inverse of $\prec$. Moreover, for each $*$-segment $\langle A, B\rangle^*$ there is $\langle C, D\rangle^* \in \bigcup\mathcal{H}$ such that $\langle C, D\rangle^* \subseteq \langle A, B\rangle^*$.*

Dowód. Build a shattering v-matrix $\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ such that $\alpha < \beta$ implies $\mathcal{P}_\beta \prec \mathcal{P}_\alpha$. Let $J^c(\mathcal{P}_\alpha)$ be the family of all $*$-segments $\langle A, B\rangle^*$ for which there are continuum many elements of $\mathcal{P}_\alpha$ not $*$-disjoint with $\langle A, B\rangle^*$. Let $F : J^c(\mathcal{P}_\alpha) \to \mathcal{P}_\alpha$ be a one-to-one function such that $F(G) \cap G$ is a $*$-segment, for every $G \in J^c(\mathcal{P}_\alpha)$. Choose a v-partition

$$\mathcal{Q} \supseteq \{F(G) \cap G : G \in J^c(\mathcal{P}_\alpha)\}.$$

Having these, one can improve $\mathcal{H}$ to obtain $\mathcal{P}_{\alpha+1} \prec \mathcal{Q}$ and $\mathcal{P}_{\alpha+1} \prec \mathcal{P}_\alpha$. One obtains that, if $\langle A, B\rangle^* \in J^c(\mathcal{P}_\alpha)$, then there is $\langle C, D\rangle^* \in \mathcal{P}_{\alpha+1}$ with $\langle C, D\rangle^* \subseteq \langle A, B\rangle^*$.

For each $*$-segment $\langle A, B\rangle^*$ there exists $\alpha < \kappa(v)$ such that $\langle A, B\rangle^* \in J^c(\mathcal{P}_\alpha)$. Indeed, fix a $*$-segment $\langle A, B\rangle^*$. Let $B^0_{\alpha_0}$ and $B^1_{\alpha_0}$ be two different $*$-segments belonging to $\mathcal{P}_{\alpha_0}$ such that $D^0_{\alpha_0} = \langle A, B\rangle^* \cap B^0_{\alpha_0}$ and $D^1_{\alpha_0} = \langle A, B\rangle^* \cap B^1_{\alpha_0}$ are $*$-segments. Thus, $D^{i_0}_{\alpha_0} \subseteq \langle A, B\rangle^*$ for $i_0 \in \{0, 1\}$. Inductively, let $B^{i_0 i_1 \ldots i_{n-1} 0}_{\alpha_n}$ and $B^{i_0 i_1 \ldots i_{n-1} 1}_{\alpha_n}$ be two different $*$-segments belonging to $\mathcal{P}_{\alpha_n}$ such that $D^{i_0 i_1 \ldots i_{n-1} 0}_{\alpha_n} = \langle A, B\rangle^* \cap B^{i_0 i_1 \ldots i_{n-1} 0}_{\alpha_n}$ and $D^{i_0 i_1 \ldots i_{n-1} 1}_{\alpha_n} = \langle A, B\rangle^* \cap B^{i_0 i_1 \ldots i_{n-1} 1}_{\alpha_n}$ are $*$-segments. We get

$$D^{i_0 i_1 \ldots i_n}_{\alpha_n} \subset D^{i_0 i_1 \ldots i_{n-1}}_{\alpha_{n-1}} \subset \langle A, B\rangle^*.$$

Put $\beta = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. By the construction and Fact 52, we get $\langle A, B\rangle^* \in J^c(\mathcal{P}_{\beta+1})$. Therefore, for each $*$-segment $\langle A, B\rangle^*$ there exists $\alpha < \kappa(v)$ and $\langle C, D\rangle^* \in \mathcal{P}_\alpha$ such that $\langle C, D\rangle^* \subseteq \langle A, B\rangle^*$ $\square$

Let $\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ be a v-matrix as in the Theorem 61. In general, any two members of the union $\bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ are $*$-disjoint or one is included in the other. One could remove a set M_C of cardinality less than $\mathfrak{c}$ from each $*$-segment $C \in \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ such that any two members of the family

$$\mathcal{Q} = \{C \setminus M_C : C \in \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}\}$$

are disjoint or one is included in the other. Any $\mathcal{Q}$ as above is called *a base v-matrix*. Thus, $\kappa(v)$ is the height of a base v-matrix. The next theorem yields analogy to nowhere Ramsey sets, compare [46] p. 665.

Twierdzenie 62. *The ideal (v^0) coincides with the family of all nowhere dense subsets with respect to the topology generated by a base v-matrix.*

Dowód. Let $S \subseteq [\omega]^\omega$ be a v^0-set and $\mathcal{Q}$ a base v-matrix. Any set $W \in \mathcal{Q}$ is a $*$-segment minus a set of cardinality less than $\mathfrak{c}$. By Fact 51 and Lemma 58, there is a $*$-segment $\langle A, B\rangle^* \subseteq W$ such that $\langle A, B\rangle^* \cap S = \emptyset$, for each $W \in \mathcal{Q}$. By Theorem 61 there exists a $*$-segment $V \in \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ such that $V \subseteq \langle A, B\rangle^*$. Sets $V \setminus M_V \in \mathcal{Q}$ witnesses that S is nowhere dense.

Let S be a nowhere dense set. Take a segment $\langle A, B\rangle$. Choose a $*$-segment $W \in \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ such that $W \subseteq \langle A, B\rangle^*$. Then choose $V \in \mathcal{Q}$ such that $V \subseteq W \setminus S$. Any segment $\langle C, D\rangle \subseteq V$ witnesses that S is a v^0- set. □

In ZFC, Hausdorff [18] proved that there exists a (ω_1, ω_1^*)-gap. This suggests that the height of a base v-matrix could be ω_1. We do not know:

Is it consistent that $\omega_1 \neq \kappa(v)$?

Without loss of generality, one can add to the definition of a base v-matrix that $\mathcal{P}_\beta \prec \mathcal{P}_\alpha$ means that for each $\langle C, D\rangle^* \in \mathcal{P}_\beta$ there exists $\langle A, B\rangle^* \in \mathcal{P}_\alpha$ such that $\langle C, D\rangle \subset \langle A, B\rangle$ and sets $C \setminus A$, $B \setminus D$ are infinite. This yields that each maximal chain contained in a such base v-matrix produces a $(\kappa(v), \kappa(v)^*)$-gap or a $\kappa(v)$-limit. We need $add(v^0) = cov(v^0)$ to obtain a base v-matrix such that each maximal chain contained in it produces a $(\kappa(v), \kappa(v)^*)$-gap, only. So, we consider additivity and covering numbers of the ideal (v^0).

14.6. **Additivity and covering numbers.** Foreseeing a counterpart of Plewik's result that the additivity number of completely Ramsey sets equals to the covering number of Ramsey null sets - compare [3]

p. 352 - 353 - Halbeisen set the following question at the end of [19]: Does

$$add(v^0) = cov(v^0)?$$

The answer is obvious under the Continuum Hypothesis. We add another consistent hypotheses which confirm this equality.

Lemat 63. *If $\mathcal{P}$ is a v-partition, then the complement of the union $\bigcup \mathcal{P}$ is a v^0-set.*

Dowód. Take a segment $\langle A, B \rangle$. Since $\mathcal{P}$ is maximal, there exists $\langle C, D \rangle^* \in \mathcal{P}$ such that $\langle A \cup C, B \cap D \rangle^*$ is a $*$-segment contained in $\bigcup \mathcal{P}$. □

Lemat 64. *If $S \subseteq [\omega]^\omega$ is a v^0-set, then there exists a v-partition $\mathcal{P}$ such that $\bigcup \mathcal{P} \cap S = \emptyset$.*

Dowód. If S is a v^0-set, then S^* is a v^0-set, too. Thus, for any segment $\langle A, B \rangle$ there exists a segment $\langle C, D \rangle \subseteq \langle A, B \rangle$ such that $\langle C, D \rangle^* \cap S^* = \emptyset$. Any v-partition $\mathcal{P}$ consisting of a such $\langle C, D \rangle^*$ is a desired one. □

Twierdzenie 65. $\kappa(v) = add(v^0)$.

Dowód. Consider a family $\mathcal{F}$ of v^0-sets such that $|\mathcal{F}| < \kappa(v)$. Using Lemma 64, fix a v-partition $\mathcal{P}_W$ such that $\bigcup \mathcal{P}_W \cap W = \emptyset$ for each $W \in \mathcal{F}$. Let $\mathcal{P}$ be a v-partition refining any $\mathcal{P}_W$, which exists by Lemma 59. The v^0-set $[\omega]^\omega \setminus \bigcup \mathcal{P}$ contains $\bigcup \mathcal{F}$.

Take a base v-matrix $\mathcal{Q} = \{C \setminus M_C : C \in \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}\}$. Without loss of generality one can assume that for every $C \in \mathcal{P}_\alpha$ the difference $C \setminus \bigcup \mathcal{P}_{\alpha+1}$ is not empty. Then, no segment is disjoint with the union of all sets $[\omega]^\omega \setminus \bigcup \mathcal{P}_\alpha$. In other words, this union is not a v^0-set. Therefore, $\kappa(v) \geqslant add(v^0)$. □

There are σ-fields with additivity strictly less than additivity of its natural σ-ideal. For example, consider a collection $\mathcal{F}$ of ω_1 pairwise disjoint sets, each of the cardinality ω_2. Let $\mathcal{S}$ be the σ-field generated by $\mathcal{F}$ and all subsets of $\bigcup \mathcal{F}$ of cardinality at most ω_1. Then $add(\mathcal{S}) = \omega_1$ and $add(\{X \in \mathcal{S} : |X| < \omega_2\}) = \omega_2$. This is not a case for the field (v).

Twierdzenie 66. $add(v^0) = add(v)$.

Dowód. Take a family $\mathcal{W}$ witnesses $add(v)$ and fix a segment topology. Each set $W \in \mathcal{W}$ is a v set, hence has the form $W = V_W \cup H_W$ where V_W is open and H_W is a v^0-set. The union $\bigcup\{H_W : W \in \mathcal{W}\}$ witnesses $add(v^0)$.

To prove the opposite inequality, take a set $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ which is dense and co-dense in a segment topology. One can construct $\mathcal{B}$ analogously to the classical construction of a Bernstein set. Let $\mathcal{Q} = \{C \setminus M_C : C \in \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}\}$ be a base v-matrix . Then, the union of all sets $[\omega]^\omega \setminus \bigcup\mathcal{P}_\alpha$ is not a v^0-set. If also, it is not a v-set, then it witnesses $\kappa(v) \geqslant add(v^0)$. But if this union is a v-set, then sets $\mathcal{B}\setminus\bigcup\mathcal{P}_\alpha$ constitute the family which witnesses $\kappa(v) \geqslant add(v^0)$. $\square$

Brendle observed that $cov(v^0) \leqslant r$, see Lemma 3 in [8] at page 21. Therefore, we get the following.

Twierdzenie 67. $\omega_1 \leqslant \kappa(v) = add(v^0) = add(v) \leqslant cov(v^0) \leqslant \min\{\mathrm{cf}(\mathfrak{c}), r\}$.

Dowód. Suppose $[\omega]^\omega = \bigcup\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < cf(\mathfrak{c})\}$, where always $|\mathcal{A}_\alpha| < \mathfrak{c}$. So, $cov(v^0) \leqslant cf(\mathfrak{c})$, since each $\mathcal{A}_\alpha$ is a v^0-set. Theorems 60, 65, 66 and Brendle's observation imply the rest inequalities. $\square$

Immediately, we infer the following: If $\kappa(v) = \min\{\mathrm{cf}(\mathfrak{c}), r\}$, then
$$\kappa(v) = add(v) = cov(v^0) = add(v^0).$$
But, if $\kappa(v) < t$, then there are no κ-limits, see [50], and for any base v-matrix $\mathcal{Q} = \{C \setminus M_C : C \in \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}\}$ the intersection $\bigcap\{\bigcup\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v)\}$ is empty. This yields $add(v) = cov(v^0)$. Therefore, $t = \min\{\mathrm{cf}(\mathfrak{c}), r\}$ implies $add(v) = cov(v^0)$, too.

14.7. **Ideal type of** (v^0)**.** The notion of an ideal type (λ, τ, γ) was introduced in [46], where it was obtained some consistent isomorphisms, applying the ideal type $(\mathfrak{c}, h, \mathfrak{c})$ to families of Ramsey null sets. Recall the notion of ideal types at two steps. To present it in a organized manner we enumerate conditions which are used in the definition.

Firstly, we adapt Base Matrix Lemma [3]. Suppose $\mathcal{I}$ is a proper ideal on $\bigcup\mathcal{I}$. A collection of families $\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(\mathcal{I})\}$ is called a *base $\mathcal{I}$-matrix* whenever:

(1) Each family $\mathcal{P}_\alpha$ consists of pairwise disjoint subsets of $\bigcup\mathcal{I}$;

(2) If $\beta < \alpha$, then $\mathcal{P}_\alpha$ refines $\mathcal{P}_\beta$;
(3) Always $\cup\mathcal{I} \setminus \cup\mathcal{P}_\alpha$ belongs to $\mathcal{I}$;
(4) $\mathcal{I}$ is the ideal of nowhere dense sets with respect to the topology generated by $\cup\mathcal{H}$.

Secondly, we prepare the notions for applications with Ramsey null sets and v^0-sets. The ideal $\mathcal{I}$ has the ideal type $(\lambda, \kappa(\mathcal{I}), \gamma)$ whenever there exists a base $\mathcal{I}$-matrix $\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(\mathcal{I})\}$ such that:
(5) Each $\mathcal{P}_\alpha$ has the cardinality λ;
(6) If $\beta < \alpha$ and $X \in \mathcal{P}_\beta$, then $X \setminus \cup\mathcal{P}_\alpha$ has the cardinality γ;
(7) If $\beta < \alpha$ and $Y \in \mathcal{P}_\beta$, then Y contains λ many members of $\mathcal{P}_\alpha$;
(8) There are no short maximal chains in $\cup\mathcal{H}$, i.e. if $\mathcal{C} \subseteq \cup\mathcal{H}$ is a maximal chain, then $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_\alpha$ is nonempty for each $\alpha < \kappa(\mathcal{I})$;
(9) The intersection $\cap\{\cup\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(\mathcal{I})\}$ is empty.

To describe the ideal type of (v^0) we have to assume that $cov(v^0) = \omega_1$. We do not know:

Is it consistent that $\omega_1 \neq cov(v^0)$?

If $\omega_1 = \min\{\mathrm{cf}(\mathfrak{c}), r\}$, then Theorem 67 yields $\omega_1 = cov(v^0)$.

Twierdzenie 68. *If $\omega_1 = cov(v^0)$, then (v^0) has the ideal type $(\mathfrak{c}, \omega_1, \mathfrak{c})$.*

Dowód. Let $\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ be a base v-matrix. Since $\omega_1 = cov(v^0)$ one can inductively change $\mathcal{H}$ such that

$$\cap\{\cup\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \kappa(v) = \omega_1\} = \emptyset.$$

If one considers families $\mathcal{P}_\alpha$ for limit ordinals, the one obtains a base v-matrix which witnesses that (v^0) has the ideal type $(\mathfrak{c}, \omega_1, \mathfrak{c})$. □

Thus, by [46] Theorem 2, if $h = \omega_1 = cov(v^0)$, then the ideal (v^0) is isomorphic with the ideal of all Ramsey null sets. This isomorphism clarify resemblances between definitions of completely Ramsey sets and v-sets. However, the σ-field (v) and the σ-field of all completely Ramsey sets are different. Some Ramsey null sets can be no v-sets, e.g. any intersection of a segment with a set which is dense and co-dense in a segment topology. Conversely, some v^0-sets can be no completely Ramsey sets. Indeed, if $\mathcal{H}$ is a base matrix, see [2], then $(\cup\mathcal{H})^*$ is not a completely Ramsey set and one can check that $(\cup\mathcal{H})^*$ is a v^0-set, compare Brendle [8].

Acknowledgment. We want to express our gratitude to the referee for his or her valuable suggestions and helpful comments.

Literatura

[1] B. Aniszczyk, *Remarks on σ-algebra of (s)-measurable sets*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987), no. 9-10, 561 - 563.
[2] B. Balcar, J. Pelant and P. Simon, *The space of ultrafilters on N covered by nowhere dense sets*, Fund. Math. 110 (1980), no. 1, 11-24.
[3] B. Balcar and P. Simon, *Disjoint refinement*, Handbook of Boolean algebras, vol. 2 (1989), North-Holland, Amsterdam, 333-388.
[4] M. Balcerzak, A. Bartoszewicz and K. Ciesielski, *On Marczewski-Burstin representations of certain algebras of sets*, Real Anal. Exchange 26 (2000/01), no. 2, 581–591.
[5] A. Blass, *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*, Foreman, Matthew (ed.) et al., Handbook of set theory. In 3 volumes. Dordrecht: Springer. 395-489 (2010).
[6] A. Błaszczyk oraz S. Turek, *Teoria mnogości*, Wydawnictwo naukowe PWN (2008).
[7] J. Brendle, *Combinatorial properties of classical forcing notions*, Ann. Pure Appl. Logic 73 (1995), no. 2, 143-170.
[8] J. Brendle, *Strolling through paradise*, Fund. Math. 148 (1995), no. 1, 1-25.
[9] J. Brendle, L. Halbeisen and B. Löwe, *Silver measurability and its relation to other regularity properties*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 138 (2005), no. 1, 135 - 149.
[10] J. Cichoń, *On dense subsets of rational numbers*, 29th Winter School on Abstract Analysis (Lhota nad Rohanovem/Zahrádky u Česke Lípy, 2001). Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 42 (2001), no. 2, 5 - 10.
[11] C. Di Prisco and J. Henle, *Doughnuts, floating ordinals, square brackets, and ultraflitters*, J. Symbolic Logic 65 (2000), no. 1, 461 - 473.
[12] E. Engeler, Omówienie w Mathematical Revious MR0225657 (37 #1250).
[13] R. Engelking, *General topology*, Mathematical Monographs,Vol. 60, Polish Scientific Publishers, Warsaw, (1977).
[14] R. Frankiewicz oraz P. Zbierski, *Granice i luki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, (1992)
[15] H. Goldstern, M. J. Johnson and O. Spinas, *Towers on trees*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), no. 2, 557-564.
[16] M. Goldstern, M. Repický, S. Shelah oraz O. Spinas, *On tree ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 5, 1573-1581.
[17] F. Hausdorff, *Die Graduierung nach dem Endverlauf*, Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Mathematisch-Physische Klasse 31 (1909), 296-334.
[18] F. Hausdorff, *Summen von $\aleph_1$ Mengen*, Fund. Math. 26 (1936), 243 - 247.
[19] L. Halbeisen, *Making doughnuts of Cohen reals*, Math. Log. Q. 49 (2003), no. 2, 173 - 178.
[20] L. Halbeisen and H. Judah, *Mathias absoluteness and the Ramsey property*, J. Symbolic Logic 61 (1996), no. 1, 177-194.

[21] J. Hirschorn, *Towers of Borel functions*, Proc. Math. Soc. 128 (1999), 559 - 604.

[22] J. Hirschorn, *Towers of measurable functions*, Fund. Math. 164 (2000), 165 - 1992.

[23] M. Ismail, Sz. Plewik, A. Szymanski, *On subspaces of* exp(N), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 49 (2000), no. 3, 397 - 414.

[24] T. Jech, *Multiple forcing*, Cambridge Tracts in Mathematics, 88. Cambridge University Press, Cambridge, (1986).

[25] T. Jech, *Set theory*, The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2003).

[26] H. Judah, A. Miller and S. Shelah, *Sacks forcing, Laver forcing, and Martin's axiom*, Arch. Math. Logic 31 (1992), no. 3, 145-161.

[27] P. Kalemba, Sz. Plewik and A. Wojciechowska, *On the ideal* (v^0), Cent. Eur. J. Math. 6 (2008), no. 2, 218-227.

[28] P. Kalemba, *Rozprawa doktorska*, Katowice (2010).

[29] P. Kalemba and Sz. Plewik, *Ideals which generalize* (v^0), Cent. Eur. J. Math. vol.8, no.6 (2010), 1016-1025.

[30] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, (1995).

[31] A. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, New York, (1995).

[32] W. Kulpa and Szymański, *Decompositions into nowhere dense sets*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), no. 1, 37-39.

[33] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York (1980).

[34] M. Kysiak and T. Weiss, *Small subsets of the reals and tree forcing notions*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 1, 251-259.

[35] M. Kysiak, A. Nowik and T. Weiss, *Special subsets of the reals and tree forcing notions*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 9, 2975 - 2982.

[36] R. Laver, *On the consistency of Borel's conjecture*, Acta Math. 137 (1976), no. 3-4, 151- 169.

[37] A. Louveau, *Une méthode topologique pour l'étude de la propriété de Ramsey*, Israel J. Math. 23 (1976), no. 2, 97 - 116.

[38] A. Louveau and S. Simpson, *A separable image theorem for Ramsey mappings*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), no. 3-4, 105 - 108.

[39] M. Machura, Rozprawa doktorska (2003).

[40] M. Machura, *Cardinal invariants p, t and h and real functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 (2004), 97 - 108.

[41] G. Moran and D. Strauss, *Countable partitions of product spaces*, Mathematika 27 (1980), no. 2, 213 - 224.

[42] J.C. Morgan II, *Point set theory*, Marcel Dekker, New York, (1990).

[43] A. Nowik and T. Weiss, *Strongly meager sets of real numbers and tree forcing notions*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 4, 1183-1187.

[44] A. Nowik, P. Reardon, *A dichotomy theorem for the Ellentuck topology*, Real Anal. Exchange 29 (2003/04), no. 2, 531 - 542.

[45] J. Pawlikowski, *Parametrized Ellentuck theorem*, Topology Appl. 37, No.1, 65 - 73 (1990).

[46] Sz. Plewik, *Ideals of nowhere Ramsey sets are isomorphic*, J. Symbolic Logic 59 (1994), no. 2, 662 - 667.

[47] Sz. Plewik and B. Voigt, *Partitions of reals: measurable approach*, J. Combin. Theory Ser. A 58 (1991), no. 1, 136 - 140.

[48] Sz. Plewik, *On completely Ramsey sets*, Fund. Math. 127 (1987), no. 2, 127-132.

[49] M. Repický, *Collapsing of Cardinals in Generalized Cohen's Forcing*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 29 (1988), no. 2, 67-74.

[50] F. Rothberger, *On some problems of Hausdorff and of Sierpiński*, Fund. Math. 35 (1948), 29 - 46.

[51] P. Štěpánek, P. Vopěnka, *Decomposition of metric spaces into nowhere dense sets.* Comment. Math. Univ. Carolinae 8 (1967), 387 -404;

[52] M. Scheepers, *Gaps in* ω^ω, In: Set Theory of the Reals, Ramat Gan. 1991, Israel Math. Conf. Proc., 6, Bar-Ilan Univ. (1993), 439-561.

[53] S. Shelah, O. Spinas, *The distributivity numbers of finite products of* $P(\omega)/fin$. Fund. Math. 158 (1998), no. 1, 81 - 93.

[54] S. Shelah, O. Spinas, *The distributivity numbers of* $P(\omega)/fin$ *and its square.* Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 5, 2023 - 2047.

[55] P. Štěpánek, P. Vopěnka, *correction*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 8 (1967) 567 – 568.

[56] M. Scheepers, *Gaps in* $(\omega^\omega, \prec)$. Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), 439–561, Israel Math. Conf. Proc.. 6, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

[57] K. Schilling, *Some category bases which are equivalent to topologies*, Real Anal. Exchange 14 (1988/89), no. 1, 210 - 214.

[58] O. Spinas, *Generic trees*, J. Symbolic Logic 60 (1995), no. 3, 705-726.

[59] E. Szpilrajn (Marczewski), *Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensambles*, Fund. Math. 24 (1935), 17 – 34.